

Développement d'un modèle de colonne verticale (1D) avec
représentation d'une nappe souterraine, et évaluation sur des cas
tests

Document de travail - Document provisoire

Mathilde Maquin

19 février 2015

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Problématique	2
1.2	Démarche	3
2	Décharge en rivière	6
2.1	Modèle de nappe	6
2.2	Évolution	7
2.3	Bilan d'eau	7
2.4	Variation du volume d'eau	8
2.5	Terme de drainage général	15
2.6	Cas tests	16
3	Précipitations	24
3.1	Modèle de nappe	24
3.2	Bilan d'eau	27
3.3	Variation du volume d'eau	28
3.4	Terme de drainage général	34
3.5	Cas tests	39
4	Évaporation - Transpiration	44
4.1	Modèle de nappe	45
4.2	Bilan d'eau	46
4.3	Variation du volume d'eau	46
4.4	Cas tests	47
5	Cas général	51
5.1	Terme de drainage	51
5.2	Implémentation dans Cast3M	53
5.3	Cas tests	55
	Références	60

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique

Les modèles de surface continentale (LSM, *Land Surface Model*) sont basés sur une représentation des surfaces continentales en colonnes de sol. Une colonne représente une zone géographique de plus ou moins grande étendue (de l'ordre de $100 \times 100 \text{ km}^2$ en général lorsque les LSM sont utilisés pour des simulations à l'échelle globale). Dans ces modèles, les colonnes sont indépendantes les unes des autres, seuls les processus verticaux sont représentés. En particulier, les flux d'eau transversaux ne sont pas pris en compte. La condition à la limite en fond de colonne est généralement une condition de drainage libre. Ce choix rend impossible toute représentation de nappe à faible profondeur.

Initialement, ces modèles de surface continentale ont été développés pour calculer les flux d'évapotranspiration et les imposer comme terme source au modèle atmosphérique. Les LSM permettent ainsi de simuler le couplage sol-atmosphère du point de vue hydrologique. Les flux d'évapotranspiration dépendent de données atmosphériques, mais également de la disponibilité de l'eau dans le sol. Le profil de teneur en eau revêt donc une importance toute particulière dans la représentation du couplage des processus sol/atmosphère.

Le choix actuel d'un modèle de colonne à drainage libre ne permet pas de prendre en compte la variabilité spatiale des flux d'évapotranspiration due à la variabilité des profondeurs des nappes superficielles. En effet, la présence d'une nappe à faible profondeur peut augmenter sensiblement les flux d'évapotranspiration ([Kollet et Maxwell, 2008], [Condon *et al.*, 2013]). Cette limitation peut conduire à une sous-estimation des flux réels d'évapotranspiration, impactant alors les modélisations atmosphériques et les résultats de précipitations par exemple.

Pour répondre à cette problématique, il apparaît nécessaire de proposer un nouveau modèle qui prenne en compte les nappes superficielles. L'estimation des flux d'évapotranspiration à l'échelle d'une large zone géographique nécessite une résolution hydrologique 3D, mais ceci est trop coûteux en temps pour être envisagé à l'échelle globale. Des solutions alternatives à la résolution 3D doivent être proposées, où un compromis entre temps de calculs et précision des résultats est indispensable.

Dans une démarche de simplification, il est généralement considéré que les flux d'eau dans la zone non saturée du sol sont essentiellement verticaux, tandis que les flux dans la zone saturée sont principalement transversaux. Deux options s'ouvrent pour proposer un modèle aux temps de calculs raisonnables : soit les flux longitudinaux dans l'aquifère sont représentés correctement et la représentation du transfert vertical est dégradée, soit la représentation des flux verticaux est privilégiée au détriment des flux longitudinaux. Étant donné que les flux d'évapotranspiration, flux d'importance majeure pour le couplage avec l'atmosphère, dépendent fortement du profil vertical de disponibilité en eau (calculé à partir du profil de teneur en eau), la seconde approche semble plus adaptée. Pour ces raisons, il est proposé de conserver un modèle de colonne verticale, mais avec une représentation et/ou une estimation des flux longitudinaux, ce qui n'est pas le cas des modèles de colonne qui existent actuellement.

Le modèle de colonne proposé correspond à une colonne de sol quelconque au sein d'un bassin versant, l'unité hydrologique de base. L'objectif du modèle est qu'il reproduise le profil de teneur en eau du point sélectionné. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les processus de précipitation, d'évaporation et de transpiration, mais également les écoulements souterrains transversaux, élément supplémentaire par rapport aux modèles existants. Pour cela, **un terme de drainage est ajouté en fond de colonne** (en remplacement de la condition de drainage libre). **Il représente les flux d'eau traversant la colonne de sol.**

L'établissement de ce terme de drainage est présenté dans ce document. A ce stade, il a été mis au point pour une correspondance versant 2D / colonne 1D. La généralisation à des bassins versants 3D, puis à une zone géographique quelconque sera étudiée ultérieurement.

L'ensemble des développements et des simulations présentées dans ce document est réalisé avec le code de calcul *Cast3M*.

1.2 Démarche

1.2.1 Versant 2D de référence

Géométrie

Pour établir la formule du terme de drainage, puis sa validation, nous nous basons sur un versant (2D) de référence caractérisé par son homogénéité et défini par différents paramètres : sa longueur, la pente du fond de l'aquifère, la pente du sol et la profondeur de l'aquifère au droit de la rivière (figure 1.1).

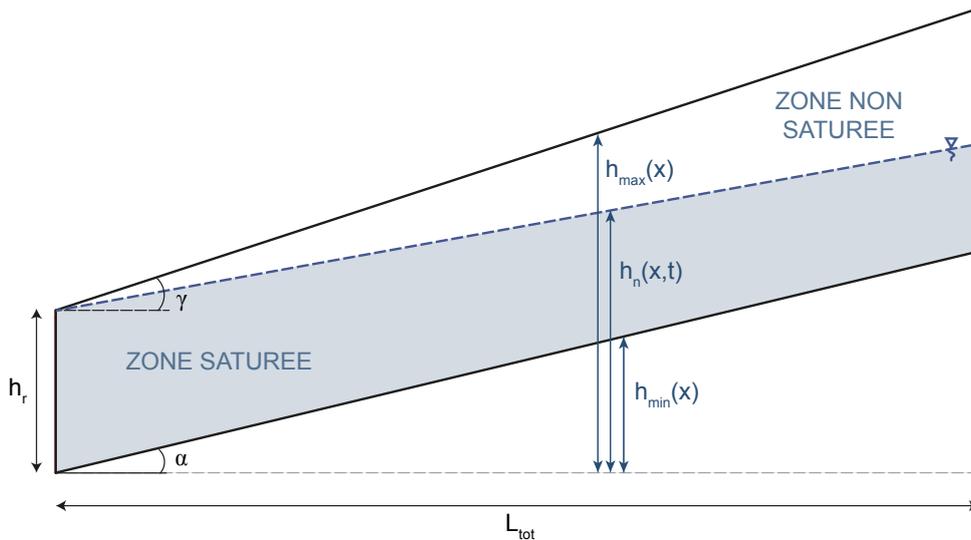


Fig. 1.1 – Schéma du modèle de versant de référence.

Sont ainsi définies les variables suivantes :

- h_r , la hauteur de l'aquifère sous la rivière,
- α , la pente formée par le fond de l'aquifère,
- γ , la pente formée par la surface du sol,
- L_{tot} , la longueur du versant,
- $h_n(x, t)$, la hauteur de la nappe à l'abscisse x et au temps t ,
- $h_{min}(x)$, la hauteur minimale de la nappe (soit le fond de l'aquifère à l'abscisse x) :

$$h_{min}(x) = x \tan \alpha,$$
- $h_{max}(x)$, la hauteur maximale de la nappe (soit la surface du sol à l'abscisse x) :

$$h_{max}(x) = h_r + x \tan \gamma.$$

Équations

L'équation de Richards, formulée en fonction de la charge (H), est résolue dans tout le domaine.

$$S(H) \frac{\partial H}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (K_{sat} K_r(\theta) \vec{\nabla} H) = q$$

avec
$$\begin{cases} S(H) = C(H) & \text{si } p < 0 \\ S(H) = S_e & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

où $p = H - z$ est la pression interstitielle, $C(H)$ la capacité capillaire et S_e le coefficient d'emménagement.

La résolution de cette équation nécessite des lois d'évolution de la saturation Sat et de la perméabilité relative K_r en fonction de la charge. Ce sont les lois de Van Genuchten ([van Genuchten, 1980]) qui sont utilisées ici.

$$Sat(p) = \begin{cases} \frac{1}{[1 + (-\beta p)^n]^m} & \text{si } p < 0 \\ 1 & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

$$K_r = Sat^{1/2} \left[1 - \left(1 - S^{1/m} \right)^m \right]$$

où β , n et m sont des constantes.

Conditions aux limites

A l'aval du versant, une charge est imposée (égale à h_r) comme condition à la limite. Les trois autres limites sont à flux nul. Les flux de précipitations, évaporation et transpiration sont introduits comme terme puits/source dans l'équation de Richards. Les forçages sont pris uniformes sur l'ensemble du versant.

cf. rapport de stage pour description flux d'ET : chaînage Orchidée/Castem

1.2.2 Modèle de colonne

Le modèle de colonne (figure 1.2) est une colonne extraite du versant 2D. Sa géométrie et ses conditions à la limite sont déduites de celles du versant. Les processus sont les mêmes (précipitations et évapotranspiration). La seule différence, majeure, avec le versant 2D est la disparition des flux d'eau horizontaux. Ceci comprend les écoulements souterrains transversaux ainsi que les écoulements de surface (ruissellement).

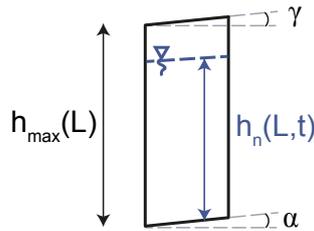


Fig. 1.2 – Schéma du modèle de colonne.

1.2.3 Construction du terme de drainage

Pour compenser la "disparition" des écoulements souterrains transversaux, par construction d'un modèle 1D vertical, un terme puits est ajouté, désigné par la suite par *terme de drainage*, au modèle de colonne. Pour cela, les écoulements souterrains présents en 2D et que l'on ne retrouve pas en 1D seront étudiés en fonction de l'origine de leur existence. Ils seront alors estimés et réinjectés dans le modèle 1D. N'ayant accès qu'aux

résultats de la colonne 1D, un certain nombre d'hypothèses vont être nécessaires pour réaliser une estimation des écoulements souterrains transversaux. Ce sont ces hypothèses et les calculs qui en découlent qui sont présentés dans ce document.

Les différentes étapes retenues pour la construction de ce terme de drainage sont les suivantes :

1. Décharge la nappe dans la rivière (chapitre 2),
2. Prise en compte des précipitations (chapitre 3),
3. Prise en compte de l'évapotranspiration (chapitre 4).

A chaque étape, le terme de drainage ainsi établi sera testé sur différents cas tests simples. Ces tests ont pour objectif de valider le terme de drainage, mais également de mettre en évidence ses limites de validité.

En fin de document, le terme de drainage général, reprenant les différentes étapes de construction, sera testé sur de nouveaux cas tests simples, mais également sur des cas réels (Bassin versant du Strengbach) (chapitre 5).

Chapitre 2

Décharge en rivière

Pour commencer, nous considérons uniquement les écoulements souterrains dus à la décharge de la nappe en rivière.

2.1 Modèle de nappe

Nous allons définir un modèle de nappe qui permette d'estimer la teneur en eau dans l'ensemble du domaine connaissant uniquement le profil vertical de teneur en eau à une distance L donnée de la rivière, c'est-à-dire les résultats d'une modélisation de colonne 1D. Pour cela, on procède en deux étapes :

1. estimation du profil du toit de la nappe ($h_n(x, t)$ pour tout x) à partir du résultat $h_n(L, t)$,
2. estimation du profil vertical de teneur en eau pour toute distance x , à partir de $h_n(x, t)$.

2.1.1 Toit de la nappe

On fait l'hypothèse que le toit de la nappe est **linéaire** et que son intersection avec la surface du sol est en $L = 0$, c'est-à-dire à la rivière. Le toit de la nappe peut ainsi être paramétré à l'aide d'un unique paramètre : $i(t)$, l'angle formé par le toit de la nappe (figure 2.1).

Hypothèse 1

L'équation décrivant le toit de la nappe est la suivante :

$$\forall x \in [0, L_{\text{tot}}], h_n(x, t) = h_r + x \times \tan i(t)$$

2.1.2 Profil vertical de teneur en eau

En ce qui concerne le profil vertical de teneur en eau, on fait l'hypothèse que pour tout x , **la charge hydraulique** $H(x, z, t)$ **est constante selon la verticale.**

Hypothèse 2

$$\forall (x, z) \in [0, L_{\text{tot}}] \times [h_{\min}(x), h_{\max}(x)], H(x, z, t) = h_n(x, t)$$

2.2 Évolution

Le profil vertical de teneur en eau découlant du profil du toit de la nappe, la variation de teneur en eau dans le domaine peut être calculée dès lors que l'on connaît l'évolution du toit de la nappe.

Nous nous basons sur l'hypothèse que le toit de la nappe évolue linéairement tout en conservant une charge égale à h_r en $x = 0$ (figure 2.1). En utilisant le théorème de Thalès, on en déduit les relations suivantes :

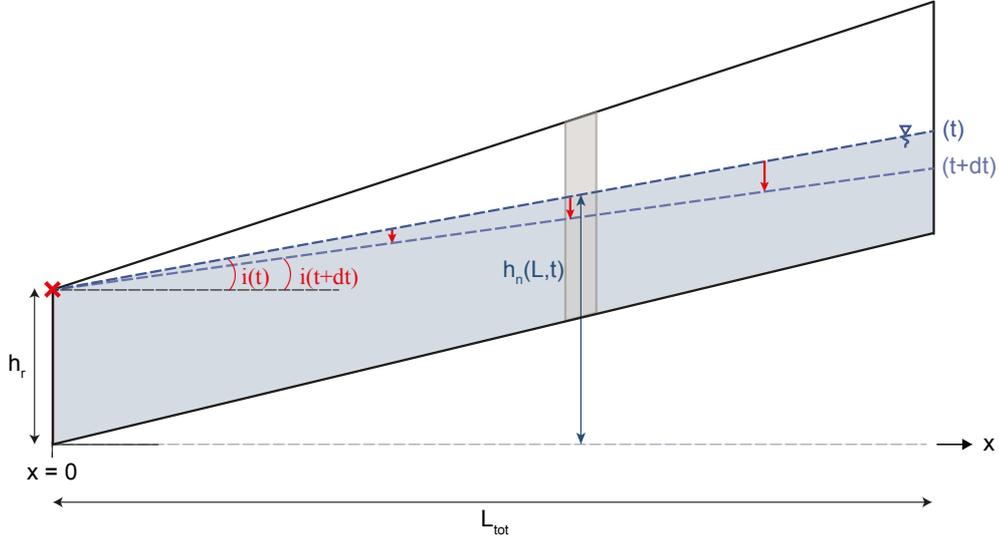


Fig. 2.1 – Modèle de nappe et son évolution en phase de décharge simple.

$$\begin{aligned} \forall (x, L) \in [0, L_{\text{tot}}]^2, \quad \frac{h_n(x, t) - h_r}{h_n(L, t) - h_r} &= \frac{x}{L} \\ \text{soit } h_n(x, t) &= h_r + \frac{x}{L} (h_n(L, t) - h_r) \\ \text{et } \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) &= \frac{x}{L} \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.3 Bilan d'eau

En l'absence de précipitations et d'évapotranspiration, la variation du volume d'eau du versant correspond au flux sortant à l'aval (section [OA] de la figure 2.2), les autres limites du modèle étant considérées à flux nul. Ce flux sortant (Q_{out}) peut être calculé en utilisant la formule de la vitesse de Darcy (\vec{v}_{out}) :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{out}} &= -K_{\text{sat}} \vec{\nabla} H \\ \text{et } Q_{\text{out}} &= \int_O^A \vec{v}_{\text{out}} \cdot d\vec{OA} \end{aligned}$$

On suppose que les équipotentiels sont des droites verticales. La vitesse de Darcy est constante le long d'une équipotentielle, donc le long de [OA]. Soit B \in [OA].

$$\begin{aligned} H(B) &= H(x_B, z_B) = H(x_A, z_A) \\ &= h_n(x_A) = x_A \tan i(t) + \text{constante} \\ \vec{\nabla} H &= \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_B \vec{e}_x = \tan i(t) \vec{e}_x \end{aligned}$$

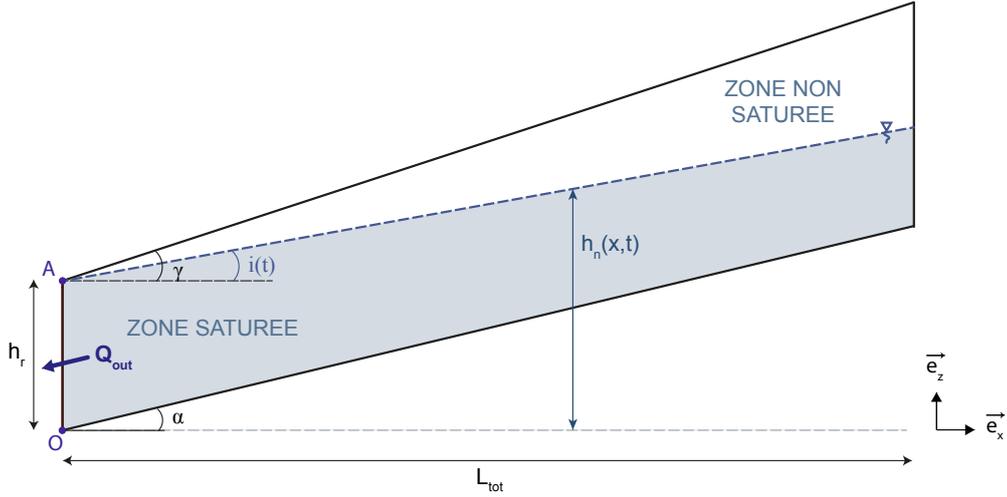


Fig. 2.2 – Modèle de versant de référence et flux sortant.

$$\begin{aligned} Q_{\text{out}} &= [OA] \times \vec{v}_{\text{out}}(A) \cdot \vec{n}_{[OA]} \\ &= h_r \times (-K_{\text{sat}} \tan i(t)) \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Q_{\text{out}} = -\frac{dV_{\text{eau}}}{dt} = K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) \quad (2.2)$$

2.4 Variation du volume d'eau

Pour calculer la variation du volume d'eau dans le versant ($\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}$), nous allons distinguer 3 cas. Définissons i_{lim} , l'angle limite qui sépare les cas où il y a présence d'une zone saturée sur toute la longueur du versant ($i(t) > i_{\text{lim}}$), de ceux où il existe une distance L à partir de laquelle la nappe n'est plus présente ($i(t) \leq i_{\text{lim}}$) (cf. figure 2.3).

$$i_{\text{lim}} = \arctan \left(\tan \alpha - \frac{h_r}{L_{\text{tot}}} \right)$$

On peut alors distinguer les cas suivants :

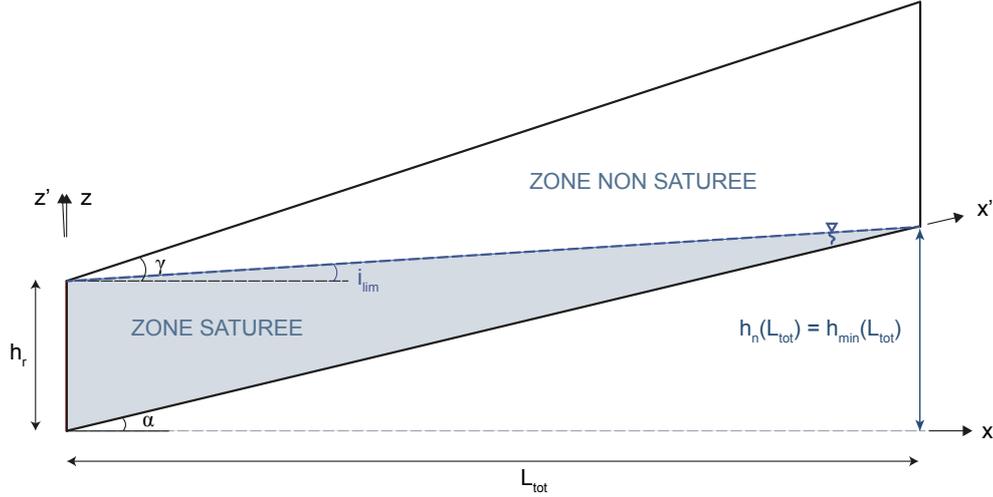
- **Cas 1** : $i(t) \in]i_{\text{lim}}; \gamma[$. Ceci signifie qu'il y a une zone saturée et une zone non saturée dans toute colonne d'abscisse x du versant ($x \in [0; L_{\text{tot}}]$).
- **Cas 2** : $i(t) = \gamma$, ce qui correspond à un versant entièrement saturé.
- **Cas 3** : $i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[$, ce qui signifie qu'au-delà d'une certaine distance de la rivière, la zone saturée n'est plus présente dans le versant.

2.4.1 Cas 1 : $i(t) \in]i_{\text{lim}}; \gamma[$

Dans le versant

On se place dans le cas général où $i(t) \in]i_{\text{lim}}; \gamma[$. Ceci revient à dire qu'il y a présence d'une zone saturée et d'une zone non saturée dans toute colonne d'abscisse x du versant ($x \in [0; L_{\text{tot}}]$).

Par définition, $V_{\text{eau}}(t) = \iint_{\text{domaine}} \theta(x, z, t) dx dz$, avec $\theta(x, z, t)$, la teneur en eau.

Fig. 2.3 – Définition du paramètre i_{lim} .

Au vu de la figure 2.3,

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eau}}(t) &= \underbrace{\int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\min}(x)}^{h_n(x,t)} \theta_s dz dx}_{\text{Zone saturée}} + \underbrace{\int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_n(x,t)}^{h_{\max}(x)} \theta(x, z, t) dz dx}_{\text{Zone non saturée}} \\
 &= \theta_s \times \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} (h_n(x, t) - h_{\min}(x)) dx + \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_n(x,t)}^{h_{\max}(x)} \theta(x, z, t) dz dx
 \end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= \theta_s \times \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \frac{\partial h_n(x, t)}{\partial t} dx + \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_n(x,t)}^{h_{\max}(x)} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} dz dx \\
 &\quad - \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \underbrace{\theta(x, z = h_n(x, t), t)}_{\theta_s} \frac{\partial h_n(x, t)}{\partial t} dx \\
 \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_n(x,t)}^{h_{\max}(x)} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} dz dx
 \end{aligned}$$

Les lois de Van Genuchten permettent d'exprimer la teneur en eau θ en zone non saturée en fonction de la pression interstitielle p (< 0) :

$$\theta(p) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + (-\beta p)^n\right]^m} \quad \text{avec } m = 1 - 1/n$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(p) = -mn(\theta_s - \theta_r)(-\beta) \frac{(-\beta p)^{n-1}}{\left[1 + (-\beta p)^n\right]^{m+1}} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.3)$$

En utilisant l'hypothèse 2 (cf. 2.1.1), on peut écrire que :

$$p(x, z, t) = h_n(x, t) - z \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, z, t) = \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t)$$

De plus, en remarquant que :

$$\frac{(-\beta(h_n(x,t) - z))^{n-1}}{[1 + (-\beta h_n(x,t) + \beta z)^n]^{m+1}} = \frac{\partial [1 + (-\beta(h_n(x,t) - z))^n]^{-m}}{\partial z} \times \frac{1}{mn(-\beta)}$$

on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) = -(\theta_s - \theta_r) \frac{\partial [1 + (-\beta(h_n(x,t) - z))^n]^{-m}}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t)} \quad (2.4)$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= -(\theta_s - \theta_r) \times \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \left[[1 + (-\beta(h_n(x,t) - z))^n]^{-m} \right]_{z=h_n(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) dx \\ &= -(\theta_s - \theta_r) \times \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \left(\left[1 + \beta^n (h_{\text{max}}(x) - h_n(x,t))^n \right]^{-m} - 1 \right) \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de linéarité de la nappe (hypothèse 1 au 2.1.1) et l'équation 2.1 qui en découle, il vient :

$$\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) = -(\theta_s - \theta_r) \times \frac{1}{L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times \left(\left[1 + (\beta x (\tan \gamma - \tan i(t)))^n \right]^{-m} - 1 \right) dx$$

en posant $\tan \gamma = \frac{h_{\text{max}}(x) - h_r}{x}$ et $\tan i(t) = \frac{h_n(x, t) - h_r}{x}$.

Finalement, l'équation obtenue est la suivante :

$$\boxed{\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) = (\theta_s - \theta_r) \times \frac{1}{L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \left(\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times \left[1 + D(t)^n x^n \right]^{-m} dx \right)} \quad (2.5)$$

avec $D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)) = \beta(\tan \gamma - \frac{h_n(x, t) - h_r}{x})$.

Dans une colonne

Soit une colonne définie par l'abscisse L , de hauteur $H(L)$. On suppose qu'il y a présence d'une zone non saturée et d'une zone saturée en fond de la colonne.

$$V_{\text{eau}}^{\text{col}}(L, t) = \int_{z=0}^{H(L)} \theta(z, t) dz = \underbrace{\int_{z=0}^{h_n(L,t)} \theta_s dz}_{\text{Zone saturée}} + \underbrace{\int_{z=h_n(L,t)}^{H(L)} \theta(z, t) dz}_{\text{Zone non saturée}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) &= \theta_s \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) + \int_{z=h_n(L,t)}^{H(L)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) dz - \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \underbrace{\theta(z = h_n, t)}_{\theta_s} \\ &= \int_{z=h_n(L,t)}^{H(L)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) dz \end{aligned}$$

avec $\frac{\partial \theta}{\partial t}(L, z, t) = -(\theta_s - \theta_r) \frac{\partial [1 + (-\beta(h_n(x,t) - z))^n]^{-m}}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t)$ (équation 2.4).

$$\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = -(\theta_s - \theta_r) \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \int_{z=h_n(L, t)}^{H(L)} \frac{\partial \left[1 + (-\beta(h_n(L, t) - z))^n \right]^{-m}}{\partial z} dz$$

$$\boxed{\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = (\theta_s - \theta_r) \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \left(1 - \left[1 + \beta^n (H(L) - h_n(L, t))^n \right]^{-m} \right)} \quad (2.6)$$

Bilan

Au vu des équations 2.5 et 2.6, on en déduit que :

$$\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} \quad (2.7)$$

avec $\psi(L, t) = 1 - \left[1 + \beta^n (H(L) - h_n(L, t))^n \right]^{-m}$,

$$\varphi_1(t) = \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times \left[1 + D(t)^n x^n \right]^{-m} dx,$$

$$D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)).$$

En utilisant l'équation 2.2, on obtient que la fonction drainage $\Delta_{\text{drainage1}}(L, t)$ est la suivante :

$$\boxed{\Delta_{\text{drainage1}}(L, t) = \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = -K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)}} \quad (2.8)$$

2.4.2 Cas 2 : $i(t) = \gamma$

On considère le cas où la zone saturée constitue l'ensemble du versant. Pour le traiter, on propose d'étudier la limite de l'équation 2.7 lorsque $\tan i(t)$ tend vers $\tan \gamma$. Par une première analyse, on a :

$$\lim_{i(t) \rightarrow \gamma} \psi(L, t) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{i(t) \rightarrow \gamma} h_n(L, t) = H(L)$$

$$\lim_{i(t) \rightarrow \gamma} \varphi_1(t) = \frac{L_{\text{tot}}^2}{2} \quad \text{car} \quad \lim_{i(t) \rightarrow \gamma} D(t) = 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{i(t) \rightarrow \gamma} \frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t) = 0$$

Cette limite est donc de forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, considérons dans un premier temps, la fonction $\psi(L, t)$.

$$\begin{aligned} \psi(L, t) &= 1 - \left[1 + \beta^n (H(L) - h_n(L, t))^n \right]^{-m} \\ &= 1 - \left[1 + \beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n \right]^{-m} \end{aligned}$$

On applique un développement limité de type $(1+x)^\alpha$ pour x proche de 0 et $\alpha \in \mathbb{R}$ à $\left[1 + \beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n \right]^{-m}$:

$$\begin{aligned} \left[1 + \beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n \right]^{-m} &= 1 + (-m) \times \beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right) \\ \text{d'où} \quad \psi(L, t) &= m\beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour la fonction $\varphi_1(t)$, on réalise un développement en série entière de type $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1; 1[$ à $[1 + D(t)^n x^n]^{-m}$, $D(t)$ tendant vers 0 lorsque $\tan i(t)$ tend vers $\tan \gamma$:

$$[1 + D(t)^n x^n]^{-m} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D(t)x)^{nj} \text{ avec } A_j = \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-j+1)}{j!}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times [1 + D(t)^n x^n]^{-m} dx = \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} \left(x + \sum_{j=1}^{\infty} A_j D(t)^{nj} x^{nj+1} \right) dx \\ &= \frac{L_{\text{tot}}^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j D(t)^{nj} \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x^{nj+1} dx \\ &= \frac{L_{\text{tot}}^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j D(t)^{nj} \frac{L_{\text{tot}}^{nj+2}}{nj+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_{\text{tot}}^2} \times \varphi_1(t) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2 \times \frac{A_j L_{\text{tot}}^{nj} \beta^{nj}}{nj+2} (\tan \gamma - \tan i(t))^{nj} \\ &= 1 + 2 \times \frac{A_1 L_{\text{tot}}^n \beta^n}{n+2} (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

par unicité du développement limité en $x = \tan i(t)$ au voisinage de $x_0 = \tan \gamma$.

Au vu des équations (2.9) et (2.10), et avec $A_1 = -m$, on obtient que pour $\tan i(t)$ au voisinage de $\tan \gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(L, t)}{1 - \frac{2}{L_{\text{tot}}^2} \varphi_1(t)} &= \frac{m\beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right)}{2 \times \frac{mL_{\text{tot}}^n \beta^n}{n+2} (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right)} \\ &= \frac{n+2}{2} \frac{L^n}{L_{\text{tot}}^n} + o(1) \end{aligned}$$

Soit,

$$\lim_{i(t) \rightarrow \gamma} \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) \times (n+2) \frac{L^{n+1}}{L_{\text{tot}}^{n+2}}$$

ce qui permet de définir le “terme de drainage” en $i(t) = \gamma$:

$$\boxed{\Delta_{\text{drainage1}}(i(t) = \gamma) = -K_{\text{sat}} h_r \tan \gamma \times (n+2) \frac{L^{n+1}}{L_{\text{tot}}^{n+2}}} \quad (2.11)$$

2.4.3 Cas 3 : $i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[$

Dans le versant

Dans le cas où $i(t) < i_{\text{lim}}$, il existe une distance $L_{\text{lim}}(t)$ à la rivière telle que $h_n(L_{\text{lim}}(t), t) = h_{\text{min}}(L_{\text{lim}}(t))$.

$$L_{\text{lim}}(t) = \frac{h_r}{\tan \alpha - \tan i(t)}$$

Le volume d'eau du versant peut être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
V_{\text{eau}}(t) &= \underbrace{\int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{n}}(x,t)} \theta_{\text{s}} \, dz \, dx}_{x < L_{\text{lim}}(t) - \text{Zone saturée}} + \underbrace{\int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \, dx}_{x < L_{\text{lim}}(t) - \text{Zone non saturée}} \\
&+ \underbrace{\int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \, dx}_{x > L_{\text{lim}}(t) - \text{Zone non saturée}} \\
&= \theta_{\text{s}} \times \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} (h_{\text{n}}(x, t) - h_{\text{min}}(x)) \, dx + \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \, dx \\
&+ \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \, dx \\
&= V_1 + V_2 + V_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} + \frac{dV_3}{dt} \\
\frac{dV_1}{dt} &= \theta_{\text{s}} \times \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t}(x, t) \, dx + \theta_{\text{s}} \times \underbrace{(h_{\text{n}}(L_{\text{lim}}(t), t) - h_{\text{min}}(L_{\text{lim}}(t)))}_{=0} \frac{dL_{\text{lim}}}{dt} \\
\frac{dV_2}{dt} &= \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \frac{\partial V_{2b}}{\partial t}(x, t) \, dx + V_{2b}(x = L_{\text{lim}}(t), t) \times \frac{dL_{\text{lim}}}{dt} \\
&\text{avec } V_{2b}(x, t) = \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \\
&= \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) \, dz \, dx - \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \underbrace{\theta(x, z = h_{\text{n}}(x, t), t)}_{=\theta_{\text{s}}} \times \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t}(x, t) \, dx \\
&+ \int_{z=h_{\text{n}}(L_{\text{lim}}(t), t)}^{h_{\text{max}}(L_{\text{lim}}(t))} \theta(x, z, t) \, dz \times \frac{dL_{\text{lim}}}{dt} \\
\frac{dV_3}{dt} &= \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \frac{\partial V_{3b}}{\partial t}(x, t) \, dx - V_{3b}(x = L_{\text{lim}}(t), t) \times \frac{dL_{\text{lim}}}{dt} \\
&\text{avec } V_{3b}(x, t) = \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \\
&= \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) \, dz \, dx - \int_{z=h_{\text{min}}(L_{\text{lim}}(t))}^{h_{\text{max}}(L_{\text{lim}}(t))} \theta(x, z, t) \, dz \times \frac{dL_{\text{lim}}}{dt} \\
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt} &= \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) \, dz \, dx + \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) \, dz \, dx
\end{aligned}$$

Comme précédemment, en utilisant l'équation 2.4,

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= -(\theta_{\text{s}} - \theta_{\text{r}}) \times \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} \left(\left[1 + (-\beta h_{\text{n}}(x, t) + \beta h_{\text{max}}(x))^n \right]^{-m} - 1 \right) \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t}(x, t) \, dx \\
&- (\theta_{\text{s}} - \theta_{\text{r}}) \times \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left(\left[1 + (-\beta h_{\text{min}}(x) + \beta h_{\text{max}}(x))^n \right]^{-m} - 1 \right) \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t}(x, t) \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= (\theta_s - \theta_r) \times \frac{1}{L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \left(\frac{L_{\text{lim}}(t)^2}{2} - \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} x \times [1 + D(t)^n x^n]^{-m} dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \frac{L_{\text{lim}}(t)^2}{2} - \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} x \times [1 + D_2^n x^n]^{-m} dx \right) \\
&= (\theta_s - \theta_r) \times \frac{1}{L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \left(\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} x \times [1 + D(t)^n x^n]^{-m} dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} x \times [1 + D_2^n x^n]^{-m} dx \right) \tag{2.12}
\end{aligned}$$

avec $D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)) = \beta(\tan \gamma - \frac{h_n(x, t) - h_r}{x})$,

et $D_2 = \beta(\tan \gamma - \tan \alpha)$

Dans une colonne

Soit une colonne définie par l'abscisse L , de hauteur $H(L)$ ($H(L) = h_{\text{max}}(L) - h_{\text{min}}(L)$). Deux cas se présentent : soit $L < L_{\text{lim}}(t)$ et la colonne possède à la fois une zone saturée et une zone non saturée, soit $L > L_{\text{lim}}(t)$ et la nappe est absente de la colonne.

Pour $L < L_{\text{lim}}(t)$, on est dans la même configuration que dans le cas 1. On se réfère alors à l'équation 2.6.

Pour $L \geq L_{\text{lim}}(t)$, on fait l'hypothèse d'un drainage libre. La variation du volume d'eau dans la colonne est alors prise égale la conductivité hydraulique en fond de colonne.

$$\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = -K_r(z = 0) \tag{2.13}$$

Bilan

Au vu des équations 2.2, 2.6, 2.12 et 2.13, le terme de drainage dans le cas où $i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta_{\text{drainage1}}(L, t) = \begin{cases} -K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_2(t)} & \text{si } L < L_{\text{lim}}(t) \\ -K_r(z = 0) & \text{si } L \geq L_{\text{lim}}(t) \end{cases} \tag{2.14}$$

avec $\psi(L, t) = \left(1 - \left[1 + \beta^n (h_r + L \tan \gamma - h_n(L, t))^n \right]^{-m} \right)$,

$$\varphi_2(t) = \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} x \times [1 + D(t)^n x^n]^{-m} dx + \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} x \times [1 + D_2^n x^n]^{-m} dx,$$

$$D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)),$$

$$D_2 = \beta(\tan \gamma - \tan \alpha).$$

2.5 Terme de drainage général

2.5.1 Bilan des différents cas

En résumé, la fonction définissant le “terme de drainage” est la suivante :

$$\Delta_{\text{drainage1}}(L, t) = \begin{cases} -K_{\text{sat}} h_r \tan \gamma \times (n + 2) \times \frac{L^{n+1}}{L_{\text{tot}}^{n+2}} & \text{si } i(t) = \gamma \\ -K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} & \text{si } i(t) \in]i_{\text{lim}}; \gamma[\\ -K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_2(t)} & \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[\text{ et si } L < L_{\text{lim}}(t) \\ -K_r(z = 0) & \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[\text{ et si } L \geq L_{\text{lim}}(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $i_{\text{lim}} = \arctan\left(\tan \alpha - \frac{h_r}{L_{\text{tot}}}\right)$

$$L_{\text{lim}}(t) = \frac{h_r}{\tan \alpha - \tan i(t)}$$

$$\psi(L, t) = \left(1 - \left[1 + \beta^n (h_r + L \tan \gamma - h_n(L, t))^n\right]^{-m}\right),$$

$$\varphi_1(t) = \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times \left[1 + D(t)^n x^n\right]^{-m} dx,$$

$$\varphi_2(t) = \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} x \times \left[1 + D(t)^n x^n\right]^{-m} dx + \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} x \times \left[1 + D_2^n x^n\right]^{-m} dx,$$

$$D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)),$$

$$D_2 = \beta(\tan \gamma - \tan \alpha).$$

2.5.2 Implémentation

La formule de drainage établie en 2.15 correspond à la quantité d'eau à retirer dans la colonne au cours d'un pas de temps pour représenter la décharge de la nappe dans cette colonne, sous l'hypothèse d'une nappe linéaire.

Rigoureusement, on devrait imposer $\Delta_{\text{drainage1}}(L, t)$ comme flux sortant le long de la limite aval de la zone saturée de la colonne (figure 2.4). Pour des raisons numériques, il a été fait le choix de l'imposer comme terme puits en fond de colonne (figure 2.5). Il est à noter que ceci n'est possible que si $|\Delta_{\text{drainage1}}(L, t)| \ll K_{\text{sat}}$, ce qui a été vérifié a posteriori.

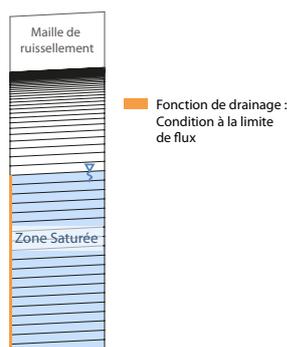


Fig. 2.4 – Drainage en tant que condition à la limite de flux.

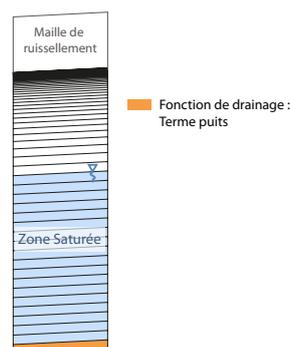


Fig. 2.5 – Drainage en tant que terme puits en fond de colonne.

2.6 Cas tests

2.6.1 Description

Dans le but d'évaluer et de valider ce terme de drainage, différents cas tests synthétiques ont été réalisés. Ils consistent en une comparaison de l'évolution de la profondeur de la nappe entre les résultats du versant 2D et ceux de différentes colonnes extraites de ce même versant.

Différentes géométries ont été testées et sont décrites dans le tableau 2.1.

Géométrie	h_r	L_{tot}	$\tan \gamma$	$\tan \alpha$	$\tan i(t = 0)$
1	5 m	50 m	10 %	10 %	7 %
2	5 m	100 m	10 %	10 %	7 %
3	5 m	100 m	10 %	10 %	3 %
4	5 m	50 m	10 %	0 %	7 %
5	5 m	50 m	30 %	30 %	20 %

Tab. 2.1 – Géométrie des cas tests de décharge.

Pour chacune de ces géométries, trois types de sol ont été testés : un sol sableux, un sol limoneux et un sol argileux (tableau 2.2).

Sol	θ_s	θ_r	n	$\beta (m^{-1})$	$K_{sat} (m.s^{-1})$
Fin	0,41	0,095	1,31	1,9	$7,22 \times 10^{-7}$
Moyen	0,43	0,078	1,56	3,6	$2,89 \times 10^{-6}$
Grossier	0,41	0,065	1,89	7,5	$12,28 \times 10^{-6}$

Tab. 2.2 – Paramètres utilisés dans Orchidée pour décrire trois types de sol à texture fine, moyenne et grossière.

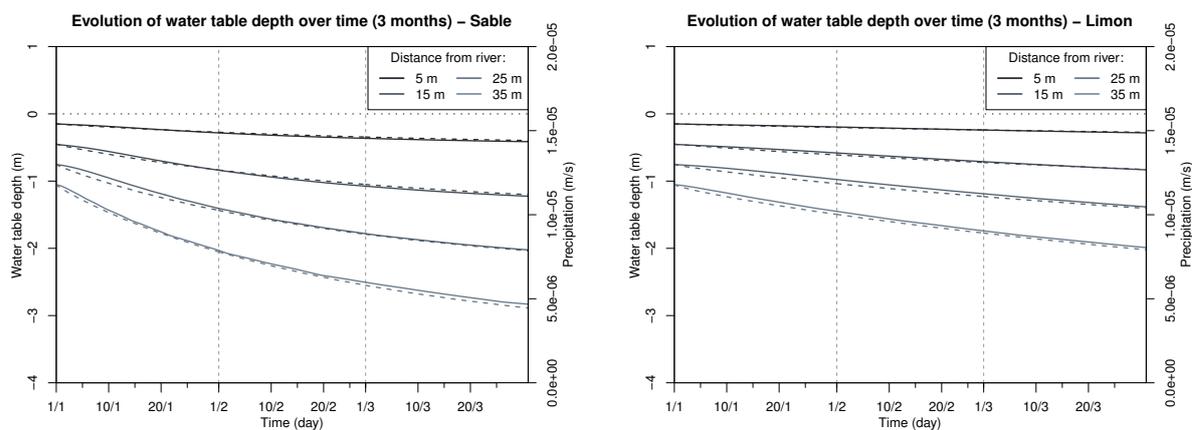
Ces paramètres correspondent respectivement à du limon argileux, du limon sablo-argileux et du sable limoneux, que l'on abrègera par la suite respectivement par "Argile", "Limon" et "Sable".

2.6.2 Géométrie 1

Paramètres géométriques : $h_r = 5$ m, $L_{tot} = 50$ m, $\tan \gamma = \tan \alpha = 10$ %, $\tan i(t=0) = 7$ %.

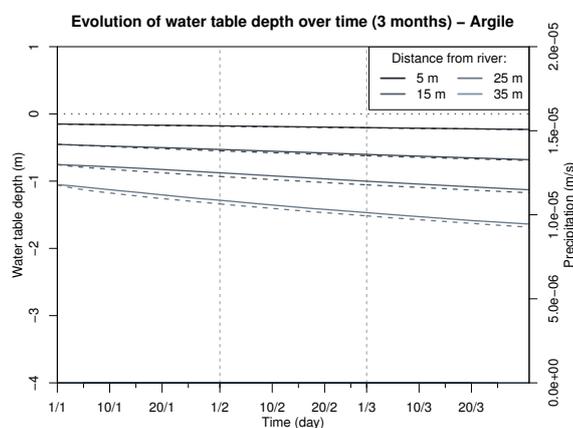
Ce premier cas test correspond à une géométrie simple avec une hauteur d'aquifère de 5 m, une longueur de versant de 50 m, et une faible pente de sol et d'aquifère prise égale à 10%. Les résultats pour les trois types de sol sont présentés sur les figures 2.6(a) à 2.6(c). Sont représentés sur ces figures les évolutions temporelles du niveau de la nappe à différentes distances de la rivière (5 m, 15 m, 25 m et 35 m) du modèle de versant 2D (traits continus) et du modèle de colonne 1D (traits pointillés), sur une période de 3 mois.

On peut noter une très bonne correspondance des résultats 1D avec les résultats 2D quelle que soit la distance à la rivière. On peut toutefois relever que l'écart entre les résultats 1D et 2D augmente lorsque L se rapproche de L_{tot} . Ceci s'explique par le fait que la nappe a tendance à s'incurver en limite aval du versant dans la simulation 2D, étant donné qu'il y a là une limite à flux nul. L'hypothèse de linéarité de la nappe dans le modèle 1D atteint alors sa limite de validité.



(a) Sable.

(b) Limon.



(c) Argile.

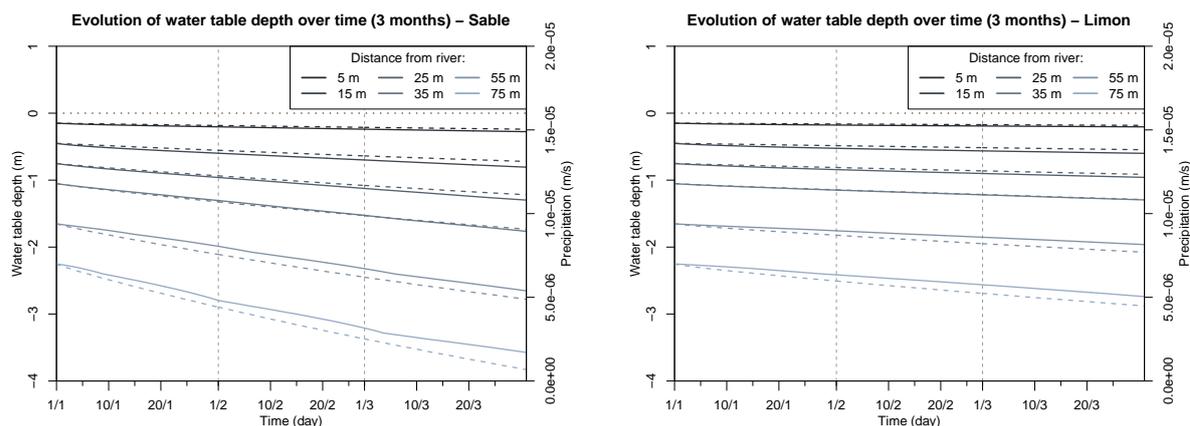
Fig. 2.6 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Géométrie 1.

2.6.3 Géométrie 2

Paramètres géométriques : $h_r = 5$ m, $L_{tot} = 100$ m, $\tan \gamma = \tan \alpha = 10$ %, $\tan i(t = 0) = 7$ %.

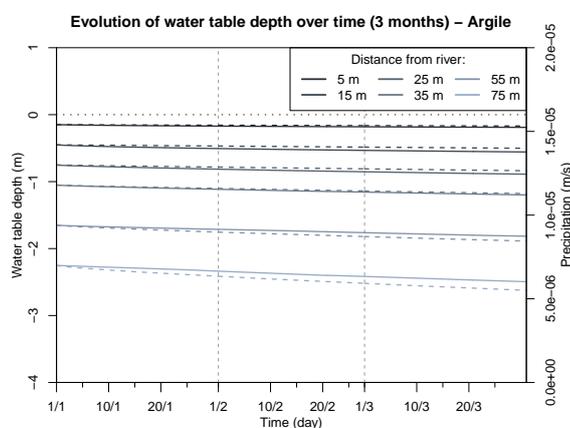
Pour ce second cas test, la longueur du versant a été augmentée, passant de 50 m à 100 m, tous les autres paramètres restant inchangés. Les modèles ont été comparés, en complément des distances précédentes, à 55 m et 75 m de la rivière. Les résultats sont présentés sur les figures 2.7(a) à 2.7(c).

Comme précédemment, les résultats du modèle 1D sont en très bon accord avec ceux du modèle 2D, avec une dégradation plus visible des résultats aux distances les plus proches de l'amont du versant. On peut également relever que cette dégradation est plus forte pour le sol sableux que pour le sol argileux, c'est-à-dire pour les sols à dynamique rapide.



(a) Sable.

(b) Limon.



(c) Argile.

Fig. 2.7 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Géométrie 2.

2.6.4 Géométrie 3

Paramètres géométriques : $h_r = 5$ m, $L_{tot} = 100$ m, $\tan \gamma = \tan \alpha = 10$ %, $\tan i(t=0) = 3$ %.

Pour ce nouveau cas test, la géométrie n'a pas été modifiée par rapport à la géométrie 2. Seul le niveau de nappe initial est abaissé de 7% à 3%. L'intérêt est de tester le cas $i(t) < i_{lim}$ de la formule de drainage 2.15. En effet, pour cette géométrie, $\tan i_{lim} = 5\%$, valeur non atteinte dans les simulations de la géométrie 2. Les résultats sont représentés sur les figures 2.8(a) à 2.8(c).

Les résultats du modèle 1D restent très bons pour les trois sols et l'ensemble des distances représentées. Notons que la distance de 75 m ne possède pas de zone saturée, d'où une profondeur de nappe constante à 5 m de profondeur qui est la profondeur de l'aquifère. Une exception est néanmoins à relever : la distance $L = 55$ m pour le sol "Sable". Comme nous le verrons dans de prochains cas tests, on observe une dégradation des résultats lorsque la nappe tend à disparaître d'une colonne. Cette dégradation s'explique également par la limite de validité de l'hypothèse de linéarité la nappe dans ces cas-là (cf. section 2.6.6 - Géométrie 5).

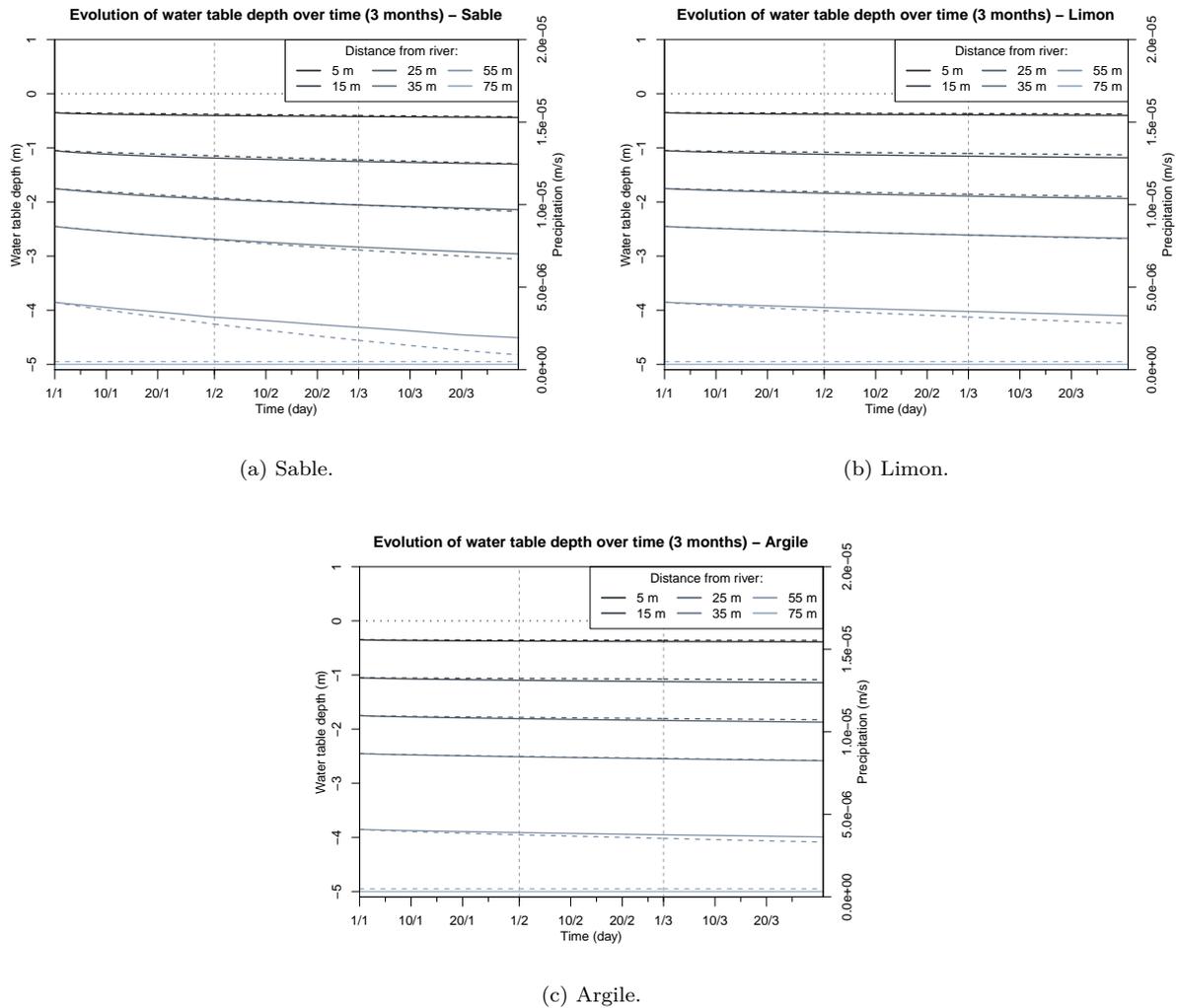


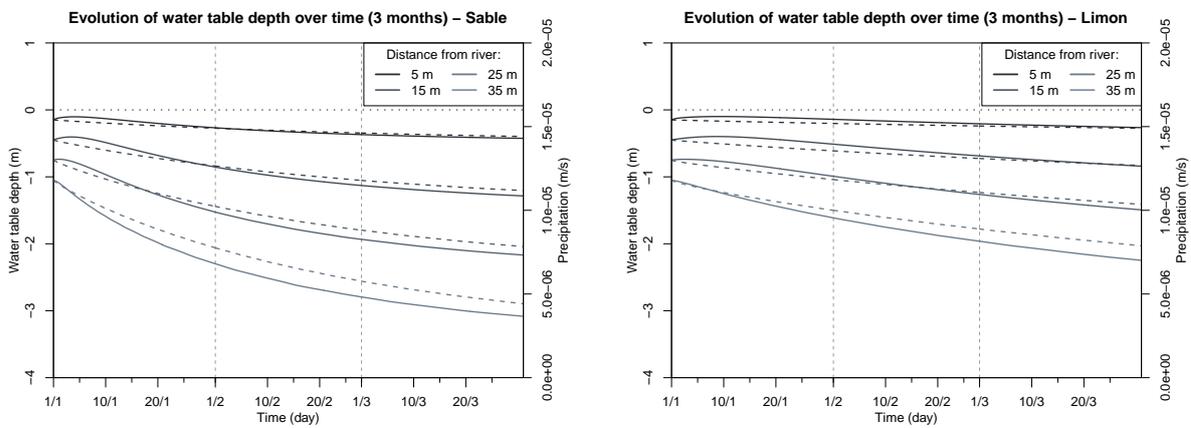
Fig. 2.8 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Géométrie 3.

2.6.5 Géométrie 4

Paramètres géométriques : $h_r = 5$ m, $L_{tot} = 50$ m, $\tan \gamma = 10$ %, $\tan \alpha = 0$ %, $\tan i(t=0) = 7$ %.

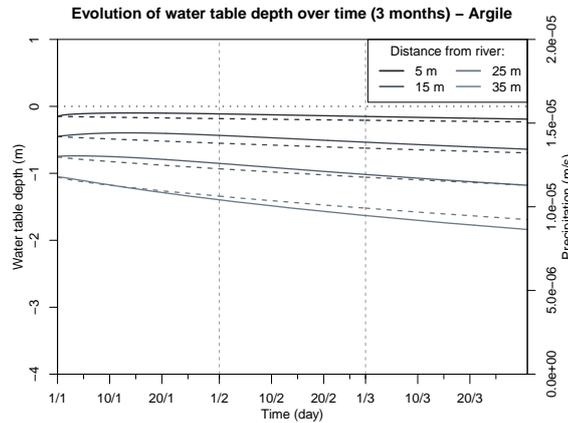
La géométrie de ce cas test est identique au premier cas test (section 2.6.2 - Géométrie 1), à l'exception de la pente de l'aquifère qui est prise nulle (au lieu de 10%). Les figures 2.9(a) à 2.9(c) représentent les résultats obtenus.

On remarque que dans le cas d'un fond d'aquifère à pente nulle, les résultats sont moins bons. Cette dégradation provient essentiellement du choix de l'initialisation de la simulation 2D par un toit de nappe linéaire. Ceci conduit à une mise à l'équilibre du toit de la nappe dans les résultats 2D que l'on observe via par une hausse du toit de la nappe au début de ces résultats 2D, et qu'évidemment on ne retrouve pas dans le modèle 1D. Néanmoins, pour les distances 5 m, 15 m et 25 m, on constate que les résultats 2D et 1D tendent à converger à la fin des 3 mois de simulations. La distance de 35 m met de nouveau en évidence la limite de validité de linéarité de la nappe. Et notons une nouvelle fois que la qualité des résultats 1D décroît lorsque la vitesse de décharge augmente (sol sableux, comparé aux deux autres).



(a) Sable.

(b) Limon.



(c) Argile.

Fig. 2.9 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Géométrie 4.

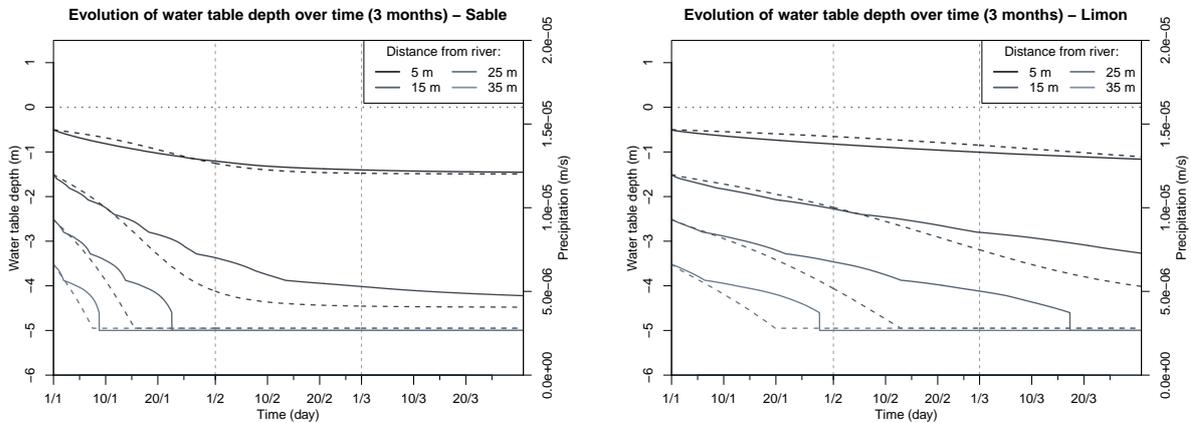
2.6.6 Géométrie 5

Paramètres géométriques : $h_r = 5$ m, $L_{tot} = 50$ m, $\tan \gamma = \tan \alpha = 30$ %, $\tan i(t = 0) = 20$ %.

Cette dernière géométrie a pour objectif de tester une forte pente de sol et d'aquifère (30% au lieu de 10% précédemment). Les résultats sont présentés sur les figures 2.10(a) à 2.10(c).

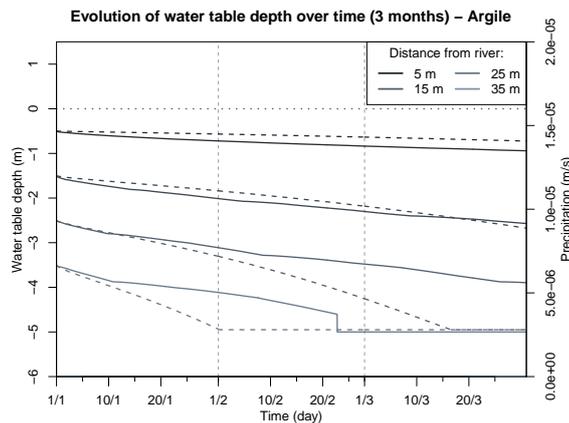
De manière générale, on observe une dégradation importante des résultats 1D. L'erreur des modèles 1D est particulièrement élevée lorsque le niveau de la nappe tend vers le fond de la colonne. Dans les autres cas ($L = 5$ m pour les trois sols et $L = 15$ m pour le sol argileux), la différence entre les résultats 1D et 2D reste acceptable.

On peut expliquer cette forte différence par la limite de validité de l'hypothèse de linéarité de la nappe lorsque celle-ci tend à disparaître d'une partie du versant. Ceci est illustré par les figures 2.11(a), 2.11(b), 2.12(a) et 2.12(b), où sont représentés le toit de nappe réel à différents instants (pour le cas du sable et du limon) et le modèle de toit de nappe linéaire. On remarque clairement l'inflexion que prend le toit de la nappe lorsqu'il approche du fond de l'aquifère, ce qui explique que le niveau de la nappe en 2D décroît plus lentement que le modèle 1D.



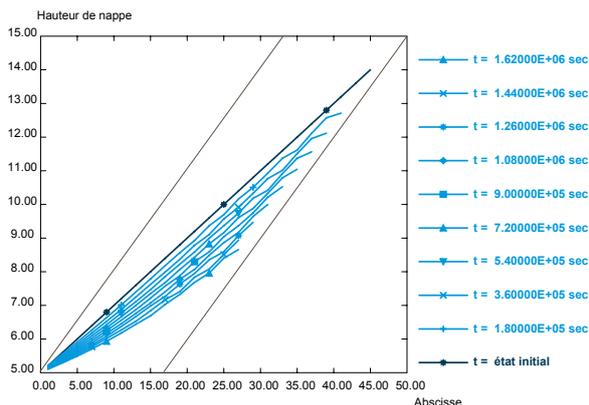
(a) Sable.

(b) Limon.

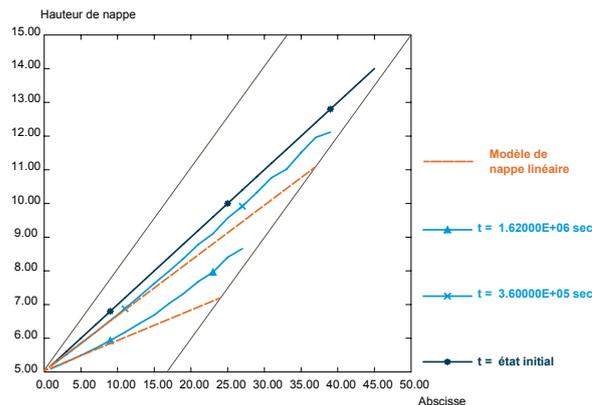


(c) Argile.

Fig. 2.10 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Géométrie 5.

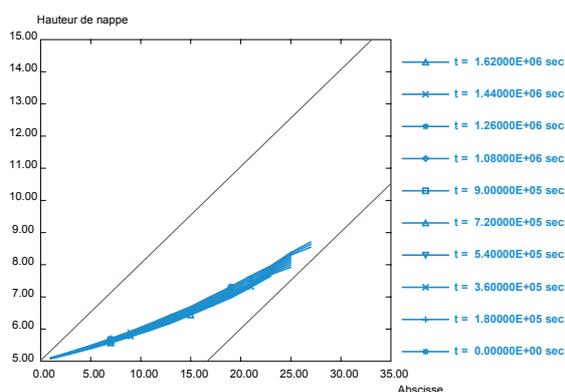


(a) Toit de la nappe à différents instants.

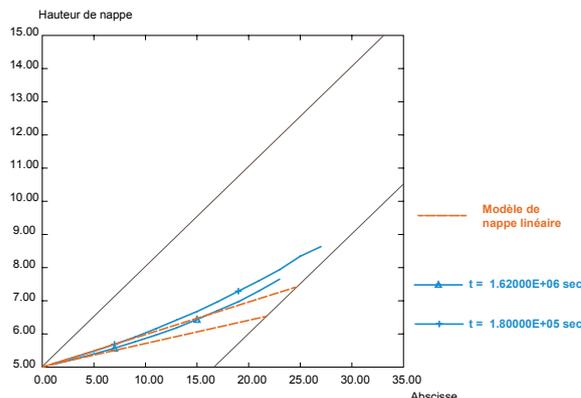


(b) Comparaison du toit de nappe réel avec le modèle de nappe linéaire.

Fig. 2.11 – Évolution du toit de la nappe au cours du mois 1 pour le sable et comparaison avec le modèle de nappe linéaire.



(a) Toit de la nappe à différents instants.



(b) Comparaison du toit de nappe réel avec le modèle de nappe linéaire.

Fig. 2.12 – Évolution du toit de la nappe au cours du mois 3 pour le limon et comparaison avec le modèle de nappe linéaire.

2.6.7 Bilan

En résumé, de très bons résultats ont été obtenus avec le modèle 1D dans des cas de géométries simples et classiques en termes d'ordre de grandeur des différents paramètres. Toutefois, quelques limites du modèle ont pu être mises en évidence.

Limite 1 : lorsque le modèle 1D est appliqué à proximité de la limite amont du versant. En effet, celle-ci étant imposée à flux nul, l'hypothèse de linéarité de la nappe n'est alors pas respectée.

Limite 2 : lorsque la colonne se désature. Dans ce cas, l'hypothèse de linéarité de la nappe n'est plus vérifiée, d'où un écart relativement important entre les résultats du modèle 1D et les résultats de référence du versant 2D.

En complément, on peut noter que de manière générale, le modèle 1D présente de moins bons résultats pour des types de sol imposant une dynamique de nappe importante. Pour une même géométrie, les résultats obtenus lorsque le sol est du sable sont moins bons que ceux obtenus avec du limon, qui sont eux-mêmes moins bons que ceux obtenus avec de l'argile.

Chapitre 3

Précipitations

Dans cette partie, le terme de drainage établi dans la partie précédente (équation 2.15) va être adapté pour prendre en compte l'impact des précipitations sur l'évolution du toit de la nappe. Cet impact comporte deux phases : une phase de recharge de la nappe, puis une phase de décharge rapide.

3.1 Modèle de nappe

3.1.1 Phase de recharge

On se place dans le cas d'une phase de recharge. Soit $\Delta h_n(L, t + dt) = h_n(L, t + dt) - h_n(L, t)$, la variation de hauteur de la nappe dans la colonne 1D modélisée (à une distance L de la rivière) au cours d'un pas de temps $[t, t + dt]$ ($\Delta h_n(L, t + dt) > 0$, en phase de recharge). On fait ici l'hypothèse que **l'ensemble du toit de la nappe s'est surélevé de ce même $\Delta h_n(L, t + dt)$** au cours de la période $[t, t + dt]$. De la sorte, la pente du toit de la nappe reste inchangée. En revanche, l'intersection entre le toit de la nappe et la surface du sol n'est plus en $x = 0$, mais en $x = x_{\text{suint}}(t + dt)$, un paramètre évoluant au cours du temps (figure 3.1).

Hypothèse 3

L'équation décrivant le toit de la nappe est désormais la suivante :

$$h_n(x, t) = \begin{cases} h_r + x \tan \gamma & \text{si } x \in [0, x_{\text{suint}}(t)] \\ h_r + x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + (x - x_{\text{suint}}(t)) \tan i(t) & \text{si } x \in [x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}] \end{cases}$$

Hypothèse 4

L'évolution du toit de la nappe répond alors à l'équation suivante :

$$\tan i(t + dt) = \tan i(t)$$

Cette hypothèse d'une surélévation uniforme du toit de la nappe revient à négliger le temps de transfert dans la zone non saturée. Elle permet d'avoir un bilan d'eau correct au sens où l'on a intégré au modèle l'ensemble des pluies tombées sur le versant au cours du pas de temps.

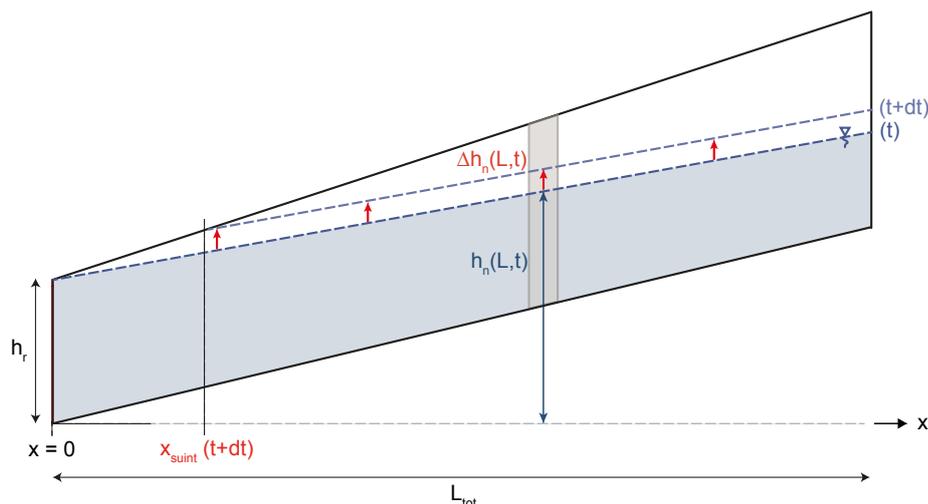


Fig. 3.1 – Modèle de nappe et son évolution en phase de recharge.

3.1.2 Phase de décharge suite à une recharge

On se place dans le cas d'une phase de décharge où $x_{\text{suint}}(t-dt) > 0$. Le cas où $x_{\text{suint}}(t-dt) = 0$ correspond au cas traité dans la partie précédente (chapitre 2). Ici, on considère que le toit de la nappe évolue linéairement avec une **hauteur de nappe constante en limite amont du versant** (en $x = L_{\text{tot}}$) au cours de la période $[t - dt, t]$ (cf. figure 3.2).

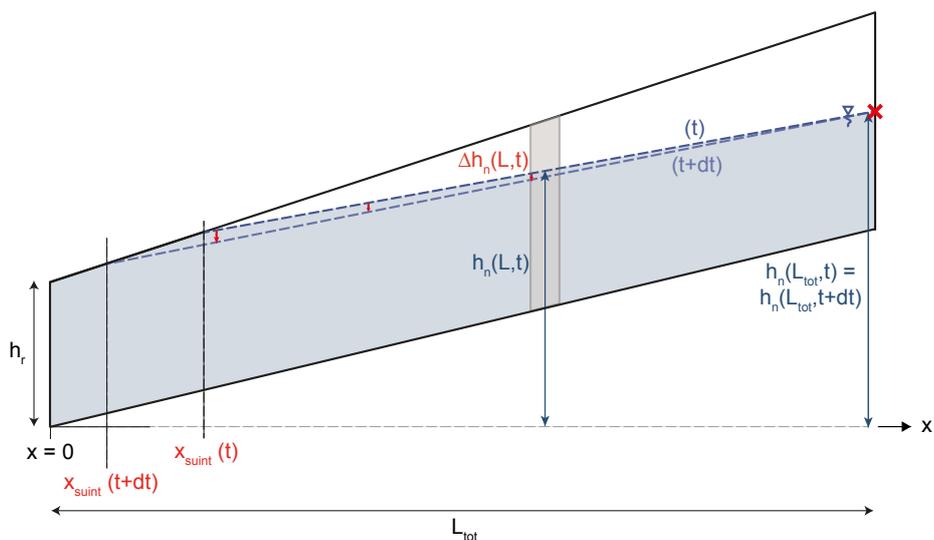


Fig. 3.2 – Modèle de nappe et son évolution en phase de décharge.

Hypothèse 5

$$h_n(L_{\text{tot}}, t) = h_n(L_{\text{tot}}, t - dt)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial t}(L_{\text{tot}}, t) = 0$$

Cette hypothèse revient à considérer que la décharge due à la présence d'une zone de suintement impacte principalement l'aval du versant et que cette phase est particulièrement rapide en comparaison de la vitesse de la décharge en amont du versant.

En faisant intervenir $h_n(L_{\text{tot}})$, l'équation de l'hypothèse 3 peut être réécrite de la manière suivante :

$$h_n(x, t) = \begin{cases} h_r + x \tan \gamma & \text{si } x \in [0, x_{\text{suint}}(t)] \\ h_n(L_{\text{tot}}) - (L_{\text{tot}} - x) \tan i(t) & \text{si } x \in [x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}] \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $h_n(L_{\text{tot}}) = h_r + x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)) \tan i(t)$.

On en déduit la relation suivante :

$$\forall (x, L) \in [x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}]^2, \quad \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) = \frac{L_{\text{tot}} - x}{L_{\text{tot}} - L} \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \quad (3.2)$$

Notons qu'en l'absence de nappe en $x = L_{\text{tot}}$, nous adaptions l'hypothèse précédente à l'abscisse x telle $h_n(x, t) = h_{\text{min}}(x)$. Notons cette abscisse L_{lim2} (cf. figure 3.3).

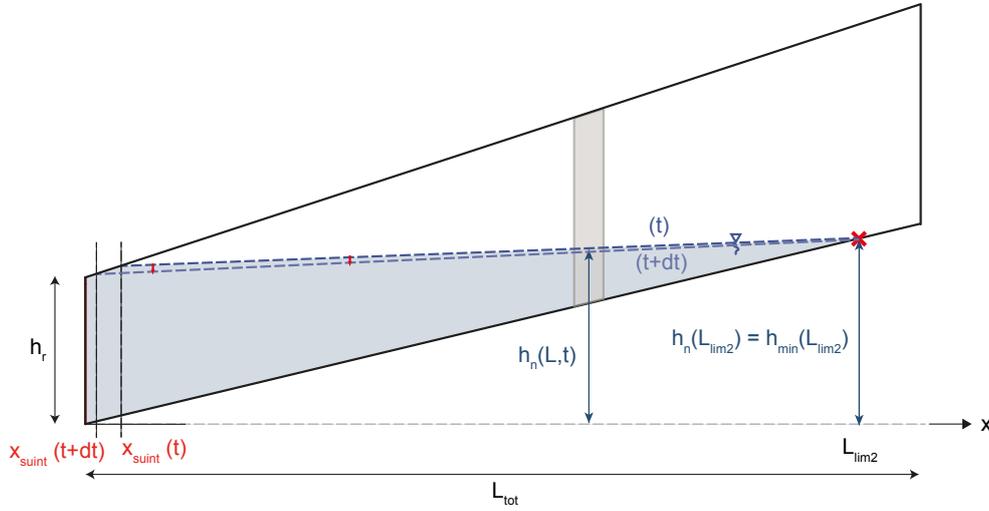


Fig. 3.3 – Modèle de nappe et son évolution en phase de décharge (hauteur de nappe constante en $x = L_{\text{lim2}}$).

Les équations précédentes s'adaptent alors de la manière suivante :

Hypothèse 6

$$\begin{aligned} h_n(L_{\text{lim2}}, t) &= h_n(L_{\text{lim2}}, t - dt) \\ \frac{\partial h_n}{\partial t}(L_{\text{lim2}}, t) &= 0 \end{aligned}$$

La fonction décrivant le niveau de la nappe est alors la suivante :

$$h_n(x, t) = \begin{cases} h_r + x \tan \gamma & \text{si } x \in [0, x_{\text{suint}}(t)] \\ h_n(L_{\text{lim2}}) - (L_{\text{lim2}} - x) \tan i(t) & \text{si } x \in [x_{\text{suint}}(t), L_{\text{lim2}}] \end{cases} \quad (3.3)$$

avec $h_n(L_{\text{lim2}}) = h_r + x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + (L_{\text{lim2}} - x_{\text{suint}}(t)) \tan i(t)$. La fonction hauteur de la nappe n'est dans ce cas pas définie pour $x > L_{\text{lim2}}$. On obtient finalement la relation suivante :

$$\forall (x, L) \in [x_{\text{suint}}(t), L_{\text{lim2}}]^2, \quad \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) = \frac{L_{\text{lim2}} - x}{L_{\text{lim2}} - L} \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \quad (3.4)$$

3.2 Bilan d'eau

Pour l'établissement du terme de drainage dans le cas où $x_{\text{suint}}(t - dt) > 0$, la démarche est la même que celle suivie dans la partie précédente.

3.2.1 Décharge en rivière

Le flux d'eau de décharge en rivière est le même que précédemment, sauf que $\tan i(t)$, qui correspond au gradient de charge en A, vaut ici $\tan \gamma$. Le toit de la nappe est en effet confondu avec la surface du sol à proximité de la rivière.

$$\boxed{Q_{\text{out}}^{\text{sol}} = K_{\text{sat}} h_r \tan \gamma} \quad (3.5)$$

3.2.2 Ruissellement de surface

Le débit par ruissellement correspond à l'exfiltration de la nappe par la section [AC] (cf. figure 3.4).

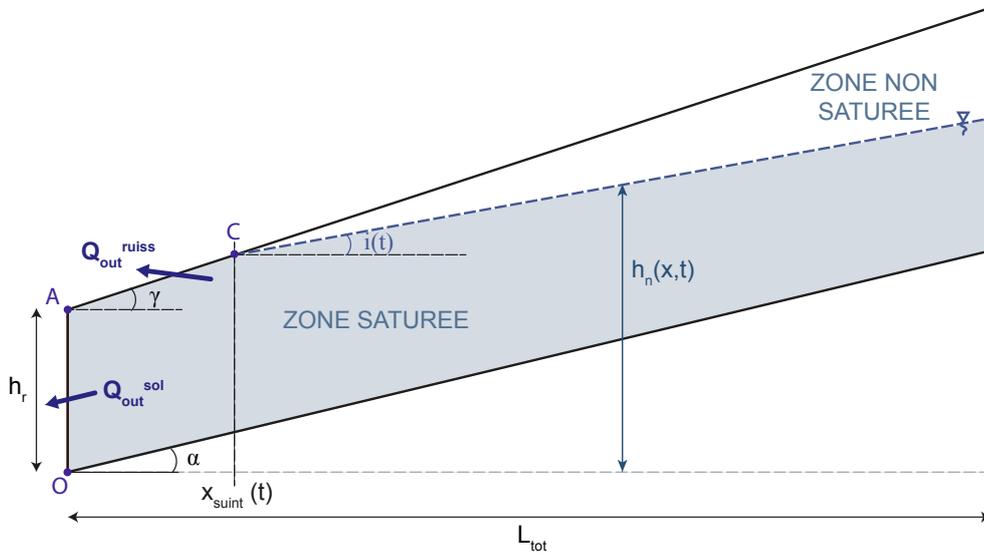


Fig. 3.4 – Modèle de versant de référence et flux sortant par le sol et par exfiltration.

Comme précédemment,

$$Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}} = \int_A^C \vec{v}_{\text{out}} \cdot d\vec{AC}$$

Soit $B \in]AC[$. Le point B étant situé à la surface du sol, qui est localement confondu avec la surface de la nappe, $H(B) = H(x_B, z_B) = h_n(x_B) = x_B \tan \gamma + \text{constante}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} H &= \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_B \vec{u}_x = \tan \gamma \vec{u}_x \\ \vec{v}_{\text{out}}(B) &= -K_{\text{sat}} \vec{\nabla} H = -K_{\text{sat}} \tan \gamma \vec{u}_x \\ Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}} &= [AC] \times (-K_{\text{sat}} \tan \gamma) \vec{u}_x \cdot \vec{n}_{[AC]} \\ &= \frac{x_{\text{suint}}}{\cos \gamma} \times (-K_{\text{sat}} \tan \gamma) \times (-\sin \gamma) \end{aligned}$$

Au final,

$$\boxed{Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t) = K_{\text{sat}} x_{\text{suint}}(t) (\tan \gamma)^2} \quad (3.6)$$

3.2.3 Bilan

En résumé, le bilan d'eau à l'échelle du versant est le suivant :

$$\frac{dV_{eau}}{dt}(t) = -Q_{out}^{sol} - Q_{out}^{ruiss}(t) + Pl(t) \times L_{tot} \quad (3.7)$$

avec $Pl(t)$, les précipitations à l'instant t (m/s).

Toutefois, les précipitations étant prises en compte de manière tout à fait identique dans les simulations 2D et 1D, et celles-ci étant considérées comme uniforme le long du versant, on peut les exclure de la suite du raisonnement. On s'attachera uniquement aux variations du volume d'eau liées aux débits sortants. On notera cette variable $\left(\frac{dV_{eau}}{dt}(t)\right)_{sortant}$ pour bien la différencier de la variation réelle de volume d'eau $\frac{dV_{eau}}{dt}(t)$.

$$\left(\frac{dV_{eau}}{dt}(t)\right)_{sortant} = -Q_{out}^{sol} - Q_{out}^{ruiss}(t) \quad (3.8)$$

3.3 Variation du volume d'eau

Pour calculer la variation du volume d'eau dans le versant ($\frac{dV_{eau}}{dt}$), nous allons distinguer 2 cas. Définissons i_{lim2} , l'angle limite qui sépare les cas où il y a présence d'une zone saturée sur toute la longueur du versant ($i(t) > i_{lim2}$), de ceux où il existe une distance L à partir de laquelle la nappe n'est plus présente ($i(t) \leq i_{lim2}$) (cf. figure 3.5).

$$i_{lim2}(t) = \arctan\left(\tan \alpha - \frac{h_r}{L_{tot} - x_{suint}(t)}\right)$$

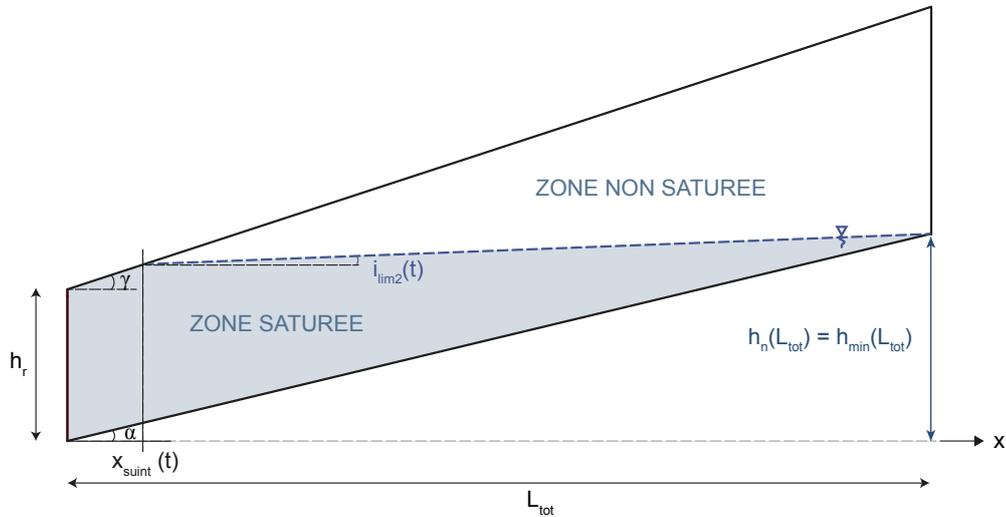


Fig. 3.5 – Définition du paramètre i_{lim2} .

3.3.1 Cas 1 : $i(t) \in]i_{\text{lim}2}; \gamma[$

Dans le versant

On se place dans le cas général où $i(t) \in]i_{\text{lim}2}; \gamma[$. Ceci revient à dire qu'il y a présence d'une zone saturée et d'une zone non saturée dans toute colonne d'abscisse x du versant ($x \in [x_{\text{suint}}(t); L_{\text{tot}}]$).

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eau}}(t) &= \underbrace{\int_{x=0}^{x_{\text{suint}}(t)} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta_s \, dz \, dx}_{\text{Zone de suintement saturée}} + \underbrace{\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{n}}(x,t)} \theta_s \, dz \, dx}_{x > x_{\text{suint}}(t) - \text{Zone saturée}} + \underbrace{\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \, dx}_{x > x_{\text{suint}}(t) - \text{Zone non saturée}} \\
 &= \theta_s \times \int_{x=0}^{x_{\text{suint}}(t)} (h_{\text{max}}(x) - h_{\text{min}}(x)) \, dx + \theta_s \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} (h_{\text{n}}(x, t) - h_{\text{min}}(x)) \, dx \\
 &\quad + \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \, dx \\
 &= V_1 + V_2 + V_3
 \end{aligned}$$

En dérivant par rapport au temps,

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} + \frac{dV_3}{dt} \\
 \frac{dV_1}{dt} &= \theta_s \times \frac{\partial x_{\text{suint}}}{\partial t}(t) (h_{\text{max}}(x_{\text{suint}}(t)) - h_{\text{min}}(x_{\text{suint}}(t))) \\
 \frac{dV_2}{dt} &= \theta_s \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t} \, dx - \theta_s \times \frac{\partial x_{\text{suint}}}{\partial t}(t) (h_{\text{n}}(x_{\text{suint}}(t), t) - h_{\text{min}}(x_{\text{suint}}(t))) \\
 \frac{dV_3}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} V_4 \, dx \right) \\
 &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \frac{dV_4}{dt} \, dx - \frac{\partial x_{\text{suint}}}{\partial t}(t) V_4(x = x_{\text{suint}}(t)) \\
 \text{avec } V_4(x) &= \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) \, dz \\
 \text{donc } V_4(x = x_{\text{suint}}(t)) &= 0 \\
 \frac{dV_4}{dt} &= \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dz - \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t} \times \theta(x, z = h_{\text{n}}, t) \\
 \frac{dV_3}{dt} &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dz \, dx - \theta_s \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t} \, dx
 \end{aligned}$$

Au final,

$$\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) = \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{n}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dz \, dx$$

Comme précédemment, on en déduit :

$$\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) = -(\theta_s - \theta_r) \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left(\left[1 + \beta^n (h_{\text{max}}(x) - h_{\text{n}}(x, t))^n \right]^{-m} - 1 \right) \frac{\partial h_{\text{n}}}{\partial t}(x, t) \, dx$$

En utilisant l'hypothèse 3, on peut écrire que,

$$\begin{aligned}
 h_{\text{max}}(x) - h_{\text{n}}(x, t) &= h_r + x \tan \gamma - h_r - x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma - (x - x_{\text{suint}}(t)) \tan i(t) \\
 &= (x - x_{\text{suint}}(t)) (\tan \gamma - \tan i(t))
 \end{aligned}$$

En se rappelant la définition de $D(t)$ de la partie précédente (cf. équation 2.7), on peut écrire :

$$\beta (h_{\max}(x) - h_n(x, t)) = D(t) \times (x - x_{\text{suint}}(t))$$

Il vient alors, au vu également de l'équation 3.2 :

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= -\frac{\theta_s - \theta_r}{L_{\text{tot}} - L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left(\left[1 + D^n(x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} - 1 \right) (L_{\text{tot}} - x) dx \\ &= \frac{\theta_s - \theta_r}{L_{\text{tot}} - L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \\ &\quad \times \left(\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left[1 + D^n(x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{tot}} - x) dx \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dans une colonne

Soit une colonne définie par l'abscisse L , de hauteur $H(L)$. Si on suppose qu'il y a présence d'une zone non saturée et d'une zone saturée en fond de la colonne, l'équation 2.6 établie dans la partie précédente reste valide ici. En effet, cette équation ne dépend pas des diverses hypothèses émises qui définissent le modèle de nappe en 2D.

Il existe cependant un cas supplémentaire par rapport à la partie précédente. Il s'agit du cas où la colonne est située dans la zone de suintement, c'est-à-dire qu'elle est saturée sur toute sa hauteur. Le calcul réalisé pour aboutir à l'équation 2.6 n'est plus justifié. On ne peut pas non plus prendre sa limite car pour $h_n(L, t) = H(L)$, $\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = 0$, ce qui conduit à une situation où le niveau de la nappe ne baissera plus. Ceci n'est pas en accord avec la physique.

Toutefois, d'un point de vue numérique, on ne rencontre jamais le cas où $h_n(L, t) = H(L)$. En effet, $H(L)$ est pris comme la côte maximale de la colonne, tandis que $h_n(L, t)$ est un résultat calculé au centre des mailles. Ainsi la différence ne peut être inférieure à la moitié de la hauteur de la maille (cf. figure 3.6). Ce cas particulier ne sera donc pas traité.

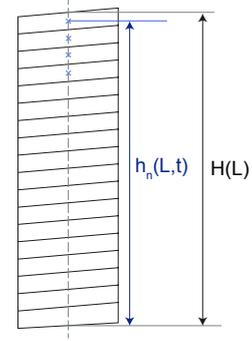


Fig. 3.6 – Différence numérique entre la hauteur de nappe d'une colonne saturée et la hauteur de la colonne.

Bilan

Au vu des équations 2.6 et 3.9, on en déduit que :

$$\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) \times (L_{\text{tot}} - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)} \quad (3.10)$$

avec $\psi(L, t) = 1 - \left[1 + \beta^n (H(L) - h_n(L, t))^n \right]^{-m}$,

$$\varphi_3(t) = \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left[1 + D^n(x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{tot}} - x) dx,$$

$$D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)).$$

En utilisant l'équation 3.8, on obtient que la fonction drainage $\Delta_{\text{drainage2}}(L, t)$ est la suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{drainage2}}(L, t) &= \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) \\ &= -(Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (L_{\text{tot}} - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)}\end{aligned}$$

Soit,

$$\boxed{\Delta_{\text{drainage2}}(L, t) = -K_{\text{sat}} (h_r \tan \gamma + x_{\text{suint}}(t)(\tan \gamma)^2) \times (L_{\text{tot}} - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)}} \quad (3.11)$$

3.3.2 Cas 2 : $i(t) = \gamma$

Considérons le cas où la zone saturée constitue l'ensemble du versant. Pour le traiter, on propose d'étudier la limite de l'équation (3.10) lorsque $\tan i(t)$ tend vers $\tan \gamma$. En s'appuyant sur les calculs effectués dans la partie précédente pour traiter ce même cas $i(t) = \gamma$, on a (cf. équation (2.9)) :

$$\psi(L, t) = m\beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right) \quad (3.12)$$

Pour la fonction $\varphi_3(t)$, on réalise un développement en série entière de type $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1; 1[$ à $\left[1 + D(t)^n(x - x_{\text{suint}}(t))^n\right]^{-m}$, $D(t)$ tendant vers 0 lorsque $\tan i(t)$ tend vers $\tan \gamma$:

$$\begin{aligned}\left[1 + D(t)^n(x - x_{\text{suint}}(t))^n\right]^{-m} &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j (D(t)(x - x_{\text{suint}}(t)))^{nj} \\ \text{avec } A_j &= \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-j+1)}{j!}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} (L_{\text{tot}} - x) \times \left[1 + D(t)^n(x - x_{\text{suint}}(t))^n\right]^{-m} dx \\ &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left(L_{\text{tot}} - x + \sum_{j=1}^{\infty} A_j D(t)^{nj} (x - x_{\text{suint}}(t))^{nj} (L_{\text{tot}} - x)\right) dx \\ &= \frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j D(t)^{nj} \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} (x - x_{\text{suint}}(t))^{nj} (L_{\text{tot}} - x) dx\end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $u = x - x_{\text{suint}}$:

$$\begin{aligned}\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} (x - x_{\text{suint}}(t))^{nj} (L_{\text{tot}} - x) dx &= \int_{u=0}^{L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)} u^{nj} (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t) - u) du \\ &= (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)) \int_{u=0}^{L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)} u^{nj} du - \int_{u=0}^{L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)} u^{nj+1} du \\ &= (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)) \times \frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{nj+1}}{nj+1} - \frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{nj+2}}{nj+2} \\ &= \frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{nj+2}}{(nj+1)(nj+2)}\end{aligned}$$

Il vient alors,

$$\begin{aligned} \frac{2}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2} \times \varphi_3(t) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2 \times \frac{A_j (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{nj} \beta^{nj}}{(nj+1)(nj+2)} (\tan \gamma - \tan i(t))^{nj} \\ &= 1 + 2 \times \frac{A_1 (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^n \beta^n}{(n+1)(n+2)} (\tan \gamma - \tan i(t))^n \\ &\quad + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

par unicité du développement limité en $x = \tan i(t)$ au voisinage de $x_0 = \tan \gamma$.

Au vu des équations (3.12) et (3.13), et avec $A_1 = -m$, on obtient que pour $\tan i(t)$ au voisinage de $\tan \gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(L, t)}{1 - \frac{2}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2} \varphi_3(t)} &= \frac{m\beta^n L^n (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right)}{2 \times \frac{m(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^n \beta^n}{(n+1)(n+2)} (\tan \gamma - \tan i(t))^n + o\left((\tan \gamma - \tan i(t))^n\right)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{L^n}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^n} + o(1) \end{aligned}$$

Soit,

$$\lim_{i(t) \rightarrow \gamma} \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) \times (L_{\text{tot}} - L)(n+1)(n+2) \frac{L^n}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{n+2}}$$

ce qui permet de définir le “terme de drainage” en $i(t) = \gamma$:

$$\Delta_{\text{drainage2}}(i(t) = \gamma) = -K_{\text{sat}} (h_r \tan \gamma + x_{\text{suint}}(t)(\tan \gamma)^2) \times (n+1)(n+2) \frac{(L_{\text{tot}} - L)L^n}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{n+2}} \quad (3.14)$$

3.3.3 Cas 3 : $i(t) \in] -\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim2}}[$

Dans le versant

Dans le cas où $i(t) < i_{\text{lim2}}$, il existe une distance $L_{\text{lim2}}(t)$ à la rivière telle que $h_n(L_{\text{lim2}}(t), t) = h_{\text{min}}(L_{\text{lim2}}(t))$.

$$L_{\text{lim2}}(t) = \frac{h_r + x_{\text{suint}}(t)(\tan \gamma - \tan i(t))}{\tan \alpha - \tan i(t)}$$

Le volume d'eau du versant peut être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} V_{\text{eau}}(t) &= \underbrace{\int_{x=0}^{x_{\text{suint}}(t)} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta_s dz dx}_{\text{Zone de suintement saturée}} + \underbrace{\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim2}}(t)} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_n(x,t)} \theta_s dz dx}_{x_{\text{suint}}(t) < x < L_{\text{lim2}}(t) - \text{Zone saturée}} \\ &\quad + \underbrace{\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim2}}(t)} \int_{z=h_n(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) dz dx}_{x_{\text{suint}}(t) < x < L_{\text{lim2}}(t) - \text{Zone non saturée}} + \underbrace{\int_{x=L_{\text{lim2}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) dz dx}_{x > L_{\text{lim2}}(t) - \text{Zone non saturée}} \\ &= \theta_s \times \int_{x=0}^{x_{\text{suint}}(t)} (h_{\text{max}}(x) - h_{\text{min}}(x)) dx + \theta_s \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim2}}(t)} (h_n(x, t) - h_{\text{min}}(x)) dx \\ &\quad + \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim2}}(t)} \int_{z=h_n(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) dz dx + \int_{x=L_{\text{lim2}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x,t)}^{h_{\text{max}}(x)} \theta(x, z, t) dz dx \\ &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} + \frac{dV_3}{dt} + \frac{dV_4}{dt} \\
\frac{dV_1}{dt} &= \theta_s \times \frac{\partial x_{\text{suint}}}{\partial t}(t) (h_{\text{max}}(x_{\text{suint}}(t)) - h_{\text{min}}(x_{\text{suint}}(t))) \\
\frac{dV_2}{dt} &= \theta_s \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) dx + \theta_s \times \underbrace{(h_n(L_{\text{lim}2}(t), t) - h_{\text{min}}(L_{\text{lim}2}(t))))}_{=0} \frac{dL_{\text{lim}2}}{dt} \\
&\quad - \theta_s \times \underbrace{(h_n(x_{\text{suint}}(t), t) - h_{\text{min}}(x_{\text{suint}}(t))))}_{=0} \frac{dx_{\text{suint}}}{dt} \\
\frac{dV_3}{dt} &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \int_{z=h_n(x, t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) dz dx - \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \underbrace{\theta(x, z = h_n(x, t), t)}_{=\theta_s} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) dx \\
&\quad + \int_{z=h_n(L_{\text{lim}2}(t), t)}^{h_{\text{max}}(L_{\text{lim}2}(t))} \theta(x, z, t) dz \times \frac{dL_{\text{lim}2}}{dt} \\
\frac{dV_4}{dt} &= \int_{x=L_{\text{lim}2}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) dz dx - \int_{z=h_{\text{min}}(L_{\text{lim}2}(t))}^{h_{\text{max}}(L_{\text{lim}2}(t))} \theta(x, z, t) dz \times \frac{dL_{\text{lim}2}}{dt}
\end{aligned}$$

Au final,

$$\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) = \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \int_{z=h_n(x, t)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) dz dx + \int_{x=L_{\text{lim}2}(t)}^{L_{\text{tot}}} \int_{z=h_{\text{min}}(x)}^{h_{\text{max}}(x)} \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, z, t) dz dx$$

Comme précédemment,

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= -(\theta_s - \theta_r) \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \left(\left[1 + \beta^n (h_{\text{max}}(x) - h_n(x, t))^n \right]^{-m} - 1 \right) \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) dx \\
&\quad - (\theta_s - \theta_r) \times \int_{x=L_{\text{lim}2}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left(\left[1 + \beta^n (h_{\text{max}}(x) - h_{\text{min}}(x))^n \right]^{-m} - 1 \right) \frac{\partial h_n}{\partial t}(x, t) dx
\end{aligned}$$

Il vient alors, en utilisant en particulier l'équation 3.4 :

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) &= \frac{\theta_s - \theta_r}{L_{\text{lim}2}(t) - L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \\
&\quad \times \left(\frac{(L_{\text{lim}2}(t) - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \left[1 + D(t)^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{lim}2}(t) - x) dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{(L_{\text{tot}} - L_{\text{lim}2}(t))^2}{2} - \int_{x=L_{\text{lim}2}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left[1 + D_2^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{lim}2}(t) - x) dx \right) \quad (3.15)
\end{aligned}$$

avec $D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)) = \beta(\tan \gamma - \frac{h_n(x, t) - h_r}{x})$,

et $D_2 = \beta(\tan \gamma - \tan \alpha)$

Dans une colonne

Soit une colonne définie par l'abscisse L , de hauteur $H(L)$ ($H(L) = h_{\text{max}}(L) - h_{\text{min}}(L)$). Trois cas se présentent : soit $L < x_{\text{suint}}(t)$ et la colonne est dans la zone de suintement, soit $x_{\text{suint}}(t) < L < L_{\text{lim}2}(t)$ et la colonne possède à la fois une zone saturée et une zone non saturée, soit $L > L_{\text{lim}2}(t)$ et la nappe est absente de la colonne.

Pour $x_{\text{suint}}(t) < L < L_{\text{lim}2}(t)$, on est dans la même configuration que dans le cas 1. On se réfère alors à l'équation 2.6.

Pour $L \geq L_{\text{lim}2}(t)$, comme dans la partie précédente, on fait l'hypothèse d'un drainage libre. La variation du volume d'eau dans la colonne est alors prise égale à la conductivité hydraulique en fond de colonne.

Enfin, pour $L < x_{\text{suint}}(t)$, nous pouvons faire la même remarque d'ordre numérique que pour le cas 1, à savoir que $H(L) - h_n(L, t)$ ne s'annule pas. On peut donc utiliser l'équation 2.6.

Bilan

Au vu des équations 2.6, 2.13 et 3.15, le terme de drainage dans le cas où $i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Delta_{\text{drainage}2}(L, t) = \begin{cases} - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (L_{\text{lim}2}(t) - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{A(t)}{2} - \varphi_4(t)} & \text{si } L < L_{\text{lim}2}(t) \\ -K_r(z = 0) & \text{si } L \geq L_{\text{lim}2}(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

avec $\psi(L, t) = \left(1 - \left[1 + \beta^n (h_r + L \tan \gamma - h_n(L, t))^n\right]^{-m}\right)$,

$$A(t) = (L_{\text{lim}2}(t) - x_{\text{suint}}(t))^2 - (L_{\text{tot}} - L_{\text{lim}2}(t))^2,$$

$$\varphi_4(t) = \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \left[1 + D(t)^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n\right]^{-m} (L_{\text{lim}2}(t) - x) dx \\ + \int_{x=L_{\text{lim}2}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left[1 + D_2^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n\right]^{-m} (L_{\text{lim}2}(t) - x) dx,$$

$$D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t)),$$

$$D_2 = \beta(\tan \gamma - \tan \alpha).$$

3.4 Terme de drainage général

3.4.1 Bilan des différents cas

En résumé, la fonction définissant le "terme de drainage" est la suivante :

$$\Delta_{\text{drainage}2}(L, t) = \begin{cases} - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (n+1)(n+2) \frac{(L_{\text{tot}} - L)L^n}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{n+2}} \\ \quad \text{si } i(t) = \gamma \\ - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (L_{\text{tot}} - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)} \\ \quad \text{si } i(t) \in]i_{\text{lim}2}; \gamma[\\ - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (L_{\text{lim}2}(t) - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{A(t)}{2} - \varphi_4(t)} \\ \quad \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}2}[\text{ et si } L < L_{\text{lim}2}(t) \\ -K_r(z = 0) \\ \quad \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}2}[\text{ et si } L \geq L_{\text{lim}2}(t) \end{cases} \quad (3.17)$$

3.4.2 Transition entre les termes de drainage

Nous avons désormais deux fonctions de drainage $\Delta_{\text{drainage1}}$ et $\Delta_{\text{drainage2}}$. La première permet de représenter la décharge de la nappe dans la rivière, tandis que la deuxième correspond à la phase de décharge rapide suivant un épisode pluvieux. Cette phase de décharge rapide est principalement due à l'exfiltration de la nappe le long de la zone de suintement. Cette zone de suintement ayant une longueur limitée, son impact sur la nappe est sensible uniquement à proximité de cette zone. En d'autres termes, au-delà d'une certaine distance de la zone de suintement, que l'on notera L_{suint} (cf. figure 3.7), l'impact de celle-ci sur la décharge diminue jusqu'à ce que la décharge en rivière devienne prédominante. On peut résumer cette problématique par le tableau 3.1.

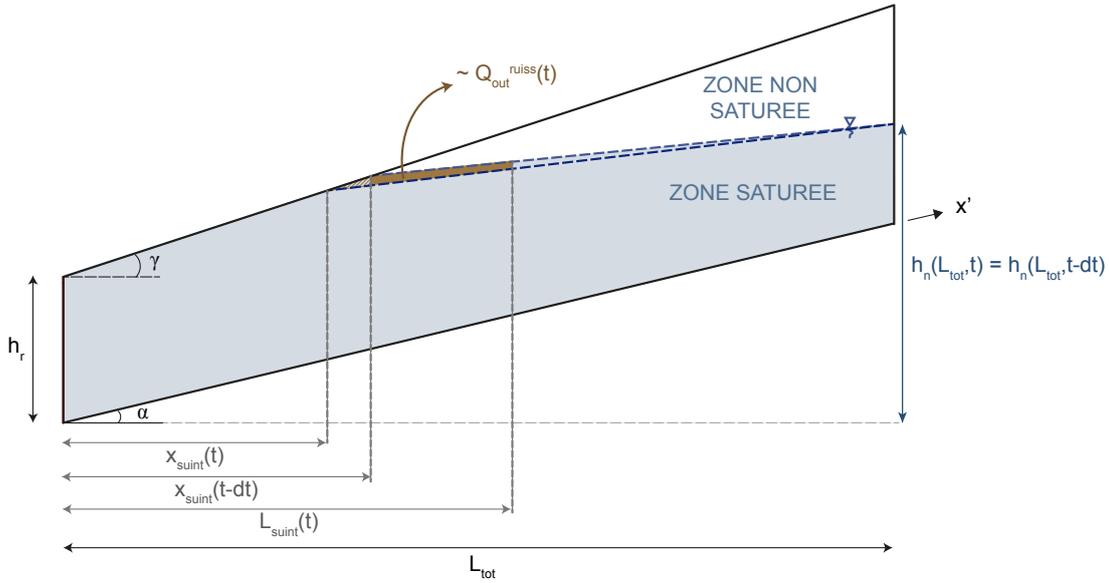


Fig. 3.7 – Illustration de L_{suint} .

x	0	$x_{\text{suint}}(t)$	L_{suint}	L_{tot}
Dr	Pas de décharge	Δ_2	Δ_2 dominant Δ_1 négligeable	Δ_2 négligeable Δ_1 dominant

Tab. 3.1 – Terme de drainage en fonction de x .

Détermination de $L_{\text{suint}}(t)$

Pour estimer $L_{\text{suint}}(t)$, nous nous basons sur l'hypothèse que la variation de volume d'eau dans l'intervalle $x \in [x_{\text{suint}}(t); L_{\text{suint}}(t)]$ correspond au volume d'eau exfiltré par la zone de suintement ($Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)$). On fait également l'hypothèse que la variation du volume d'eau dans l'intervalle $x \in [x_{\text{suint}}(t - dt); x_{\text{suint}}(t)]$ est négligeable (zone hachurée de la figure 3.7).

$$\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{suint}}(t)} \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(x, t) dx = Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)$$

En utilisant 3.11 :

$$\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{suint}}(t)} \frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(x, t) dx = - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times \frac{1}{\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)} \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{suint}}(t)} (L_{\text{tot}} - x) \times \psi(x, t) dx \quad (3.18)$$

avec $\psi(L, t) = 1 - \left[1 + \beta^n (H(L) - h_n(L, t))^n\right]^{-m}$. Prenons une valeur approchée de $\psi(x, t)$ indépendante de x , notée $\tilde{\psi}(t)$. Pour $x \in [x_{\text{suint}}(t); L_{\text{suint}}(t)]$, on peut approcher $\psi(x, t)$ de la manière suivante :

$$x \approx \frac{x_{\text{suint}}(t) + L_{\text{suint}}(t)}{2}$$

$$\psi(x, t) \approx \psi\left(\frac{x_{\text{suint}}(t) + L_{\text{suint}}(t)}{2}, t\right) = \tilde{\psi}(t)$$

Au vu de la définition de $\psi(x, t)$,

$$\psi(x, t) = 1 - \left[1 + \beta^n ((x - x_{\text{suint}}(t))(\tan \gamma - \tan i(t)))^n\right]^{-m}$$

$$\tilde{\psi}(t) = 1 - \left[1 + \beta^n \left(\frac{L_{\text{suint}}(t) - x_{\text{suint}}(t)}{2} \times (\tan \gamma - \tan i(t))\right)^n\right]^{-m} \quad (3.19)$$

Il vient alors,

$$\int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{suint}}(t)} (L_{\text{tot}} - x) \times \psi(x, t) dx \approx \tilde{\psi}(t) \times \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{suint}}(t)} (L_{\text{tot}} - x) dx$$

$$\approx \tilde{\psi}(t) \times \left(L_{\text{tot}} (L_{\text{suint}}(t) - x_{\text{suint}}(t)) - \frac{L_{\text{suint}}^2(t)}{2} + \frac{x_{\text{suint}}^2(t)}{2}\right) \quad (3.20)$$

$$\text{et } \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{suint}}(t)} (L_{\text{tot}} - x) \times \psi(x, t) dx = \frac{Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)}{Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)} \times \left(\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)\right) \quad (3.21)$$

$$\text{avec } \frac{Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)}{Q_{\text{out}}^{\text{sol}} + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)} = \frac{K_{\text{sat}} x_{\text{suint}}(t) (\tan \gamma)^2}{K_{\text{sat}} x_{\text{suint}}(t) (\tan \gamma)^2 + K_{\text{sat}} h_r \tan \gamma}$$

$$= \frac{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma}{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + h_r}$$

On déduit des équations 3.19, 3.20 et 3.21 que $L_{\text{suint}}(t)$ est solution de l'équation suivante $g(X) = 0$, avec :

$$g(X) = \left[\left(L_{\text{tot}} (X - x_{\text{suint}}(t)) - \frac{X^2}{2} + \frac{x_{\text{suint}}^2(t)}{2} \right) \right]$$

$$\times \left[1 - \left[1 + \beta^n \left(\frac{X - x_{\text{suint}}(t)}{2} \times (\tan \gamma - \tan i(t)) \right)^n \right]^{-m} \right]$$

$$- \frac{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma}{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + h_r} \left(\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t) \right) \quad (3.22)$$

Étudions la fonction $g(X)$, définie sur l'intervalle $[x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}]$, pour déterminer l'existence de $L_{\text{suint}}(t)$.

Cette fonction est dérivable sur son intervalle de définition.

$$\begin{aligned}
g(X) &= g_1(X) \times g_2(X) - g_3 \\
g'(X) &= g'_1(X) \times g_2(X) + g_1(X) \times g'_2(X) \\
&= (L_{\text{tot}} - X) \times g_2(X) \\
&\quad + g_1(X) \times mn\beta^n \left[1 + \beta^n \left(\frac{X - x_{\text{suint}}(t)}{2} \times (\tan \gamma - \tan i(t)) \right)^n \right]^{-m-1} \\
&\quad \times (\tan \gamma - \tan i(t))^n \times \left(\frac{X - x_{\text{suint}}(t)}{2} \right)^{n-1} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $g'(X) > 0$ pour tout $X \in]x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}]$, et donc que la fonction est strictement croissante sur cet intervalle. De plus,

$$g(X = x_{\text{suint}}(t)) = -\frac{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma}{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + h_r} \left(\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t) \right)$$

Comme (cf. équation 3.9),

$$\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t) = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt} \times \frac{L_{\text{tot}} - L}{\theta_s - \theta_r} \times \frac{1}{\frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t)}$$

et que $\frac{dV_{\text{eau}}}{dt}$ et $\frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t)$ sont de même signe, ont en déduit que $g(X = x_{\text{suint}}(t)) < 0$.

Le signe de $g(X = L_{\text{tot}})$ ne peut être déterminé facilement.

Trois cas peuvent se présenter :

- $g(X = L_{\text{tot}}) < 0$, et dans ce cas l'équation $g(X) = 0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}]$.
On en déduit que l'influence de la zone de suintement sur la décharge de la nappe dépasse la longueur du versant.
- $g(X = L_{\text{tot}}) = 0$, et dans ce cas $L_{\text{suint}}(t) = L_{\text{tot}}$ par stricte croissance de la fonction $g(X)$ sachant que $g(X = x_{\text{suint}}(t)) < 0$.
- $g(X = L_{\text{tot}}) > 0$, et dans ce cas il existe une unique solution à l'équation $g(X) = 0$, $X \in]x_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}[$.
Cette solution unique est $L_{\text{suint}}(t)$.

Dans ce dernier cas, une solution approchée peut être obtenue par méthodes numériques.

Terme de drainage en prenant en compte $L_{\text{suint}}(t)$

En se basant sur le tableau 3.1, et sous l'hypothèse que $L_{\text{suint}}(t)$ existe, on peut écrire :

$$\Delta_{\text{drainage3}}(L, t) = \begin{cases} \Delta_{\text{drainage2}}(L, t) & \text{si } L \leq L_{\text{suint}}(t) \\ f(L_{\text{suint}}(t)) & \text{si } L \in]L_{\text{suint}}(t), L_{\text{tot}}[\end{cases} \quad (3.23)$$

où f est une fonction de mélange.

Pour modéliser cette zone de transition, on propose de choisir f de sorte que $f(X) = f_1(X) \times \Delta_{\text{drainage1}}(L, t) + f_2(X) \times \Delta_{\text{drainage2}}(L, t)$, avec :

$$\begin{aligned}
\forall L_{\text{suint}}(t) \in [0, L], f_1(L_{\text{suint}}(t)) + f_2(L_{\text{suint}}(t)) &= 1, \\
f_1(L_{\text{suint}}(t) = 0) &= 1, \\
f_2(L_{\text{suint}}(t) = L) &= 1, \\
f_1(L_{\text{suint}}(t) = L/2) &= f_2(L_{\text{suint}}(t) = L/2) = 1/2.
\end{aligned}$$

La fonction retenue est de type arctan (cf. figure 3.8) :

$$f_2(X) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan(-C \times \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X-L} \right)) \right)$$

avec $C = -\tan\left(0,8 \times \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0-L}}$ et $x_0 = \frac{3}{4}L$, de sorte que $f_2(X = \frac{3}{4}L) = 0,9$.

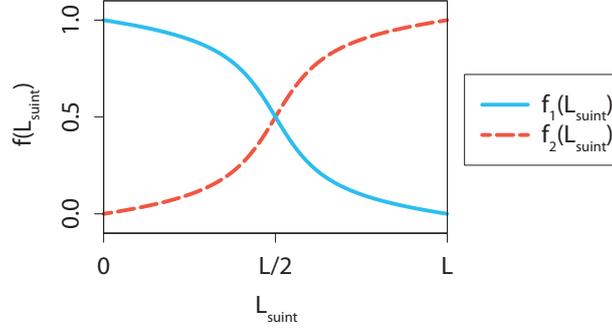


Fig. 3.8 – Fonction de mélange.

3.4.3 Bilan

Au final, le terme de drainage est le suivant :

$$\text{Drainage} = \begin{cases} \Delta_{\text{drainage1}}(L, t) & \text{si } x_{\text{suint}}(t) = 0 \\ \Delta_{\text{drainage2}}(L, t) & \text{si } x_{\text{suint}}(t) > 0 \text{ et si } L \leq L_{\text{suint}}(t) \\ f_1(L_{\text{suint}}(t)) \times \Delta_{\text{drainage1}}(L, t) + f_2(L_{\text{suint}}(t)) \times \Delta_{\text{drainage2}}(L, t) & \text{si } x_{\text{suint}}(t) > 0 \text{ et si } L > L_{\text{suint}}(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

avec

$$L_{\text{suint}}(t) = \begin{cases} L_{\text{tot}} & \text{si } g(X = L_{\text{tot}}) \leq 0 \\ \text{l'unique solution de } g(X) = 0 & \text{si } g(X = L_{\text{tot}}) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{et } g(X) = & \left[\left(L_{\text{tot}}(X - x_{\text{suint}}(t)) - \frac{X^2}{2} + \frac{x_{\text{suint}}^2(t)}{2} \right) \right] \\ & \times \left[1 - \left[1 + \beta^n \left(\frac{X - x_{\text{suint}}(t)}{2} \times (\tan \gamma - \tan i(t)) \right)^n \right]^{-m} \right] \\ & - \frac{x_{\text{suint}}(t) \sin \gamma}{x_{\text{suint}}(t) \sin \gamma + \frac{h_r}{\cos \gamma}} \left(\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t) \right). \end{aligned}$$

3.5 Cas tests

3.5.1 Description

Dans le but d'évaluer et de valider ce terme de drainage, différents cas tests synthétiques ont été réalisés. Ils consistent en une comparaison de l'évolution de la profondeur de la nappe entre les résultats du versant 2D et ceux de différentes colonnes extraites de ce même versant.

Différents créneaux de pluie ont été testés et sont décrits dans le tableau 3.2. La géométrie du versant est la géométrie 1 des cas tests de décharge (cf. tableau 2.1), avec une pente initiale de nappe de 6 %.

Cas test	Pluie (m/s)	Début de la pluie	Fin de la pluie
1	10^{-8} m/s	10^5 s	$1,1 \times 10^6$ s
2	10^{-7} m/s	10^5 s	6×10^5 s
3	10^{-6} m/s	10^5 s	3×10^5 s

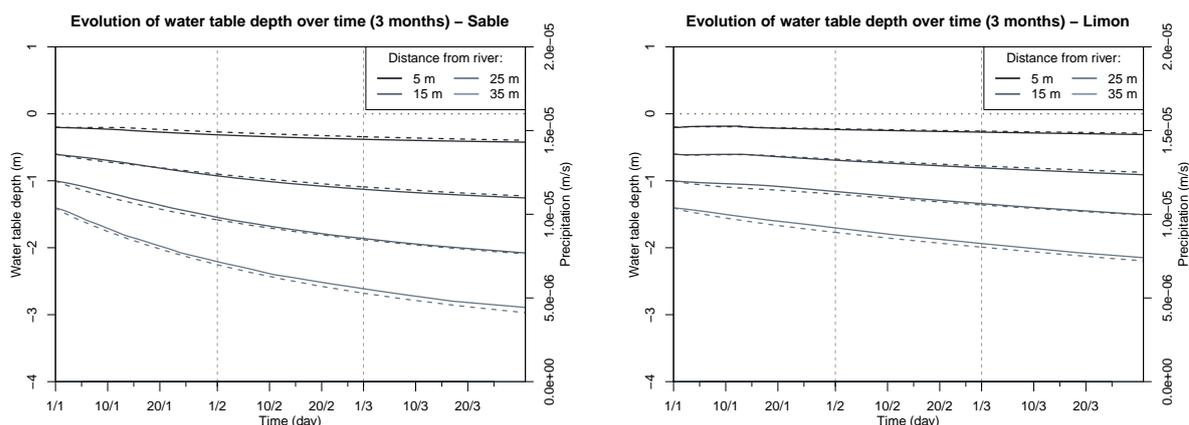
Tab. 3.2 – Cas tests de recharge.

De même que pour les cas de décharge, trois types de sol ont été testés pour les différents cas tests : un sol sableux, un sol limoneux et un sol argileux (cf. tableau 2.2).

3.5.2 Cas 1

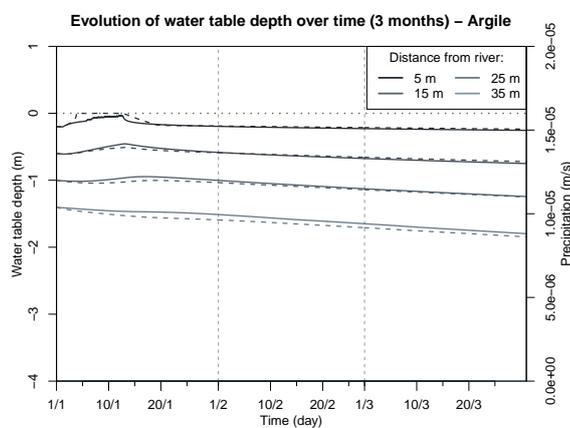
Pour une pluie de 10^{-8} m/s, les rapports précipitations sur conductivité hydraulique valent respectivement 0,1 %, 0,3 %, 1,4 % pour les sols de type "Sable", "Limon" et "Argile". Les résultats pour les trois types de sol sont présentés sur les figures 3.9(a) à 3.9(c). Sont représentés sur ces figures l'évolution du niveau de la nappe à différentes distances de la rivière (5 m, 15 m, 25 m et 35 m) du modèle de versant 2D (traits continus) et du modèle de colonne 1D (traits pointillés), sur une période de 3 mois.

On peut noter que l'impact des précipitations sur le niveau de la nappe est relativement faible, à l'exception du sol "Argile". Pour ce sol, on note une très bonne correspondance des niveaux de nappe du modèle 2D et 1D. Une nuance peut être apportée à la distance $L = 5$ m, où le niveau de la nappe atteint la surface du sol.



(a) Sable.

(b) Limon.



(c) Argile.

Fig. 3.9 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Cas test 1.

3.5.3 Cas 2

Pour une pluie de 10^{-7} m/s, les rapports précipitations sur conductivité hydraulique valent respectivement 0,8 %, 3,5 %, 13,9 % pour les sols de type "Sable", "Limon" et "Argile". Les résultats pour les trois types de sol sont présentés sur les figures 3.10(a) à 3.10(c).

On observe ici globalement de bons résultats du modèle 1D, avec une bonne représentation des phases de charge, de décharge rapide suite à la recharge, puis de décharge plus lente (bien visible sur les résultats du Limon en $L = 15$ m).

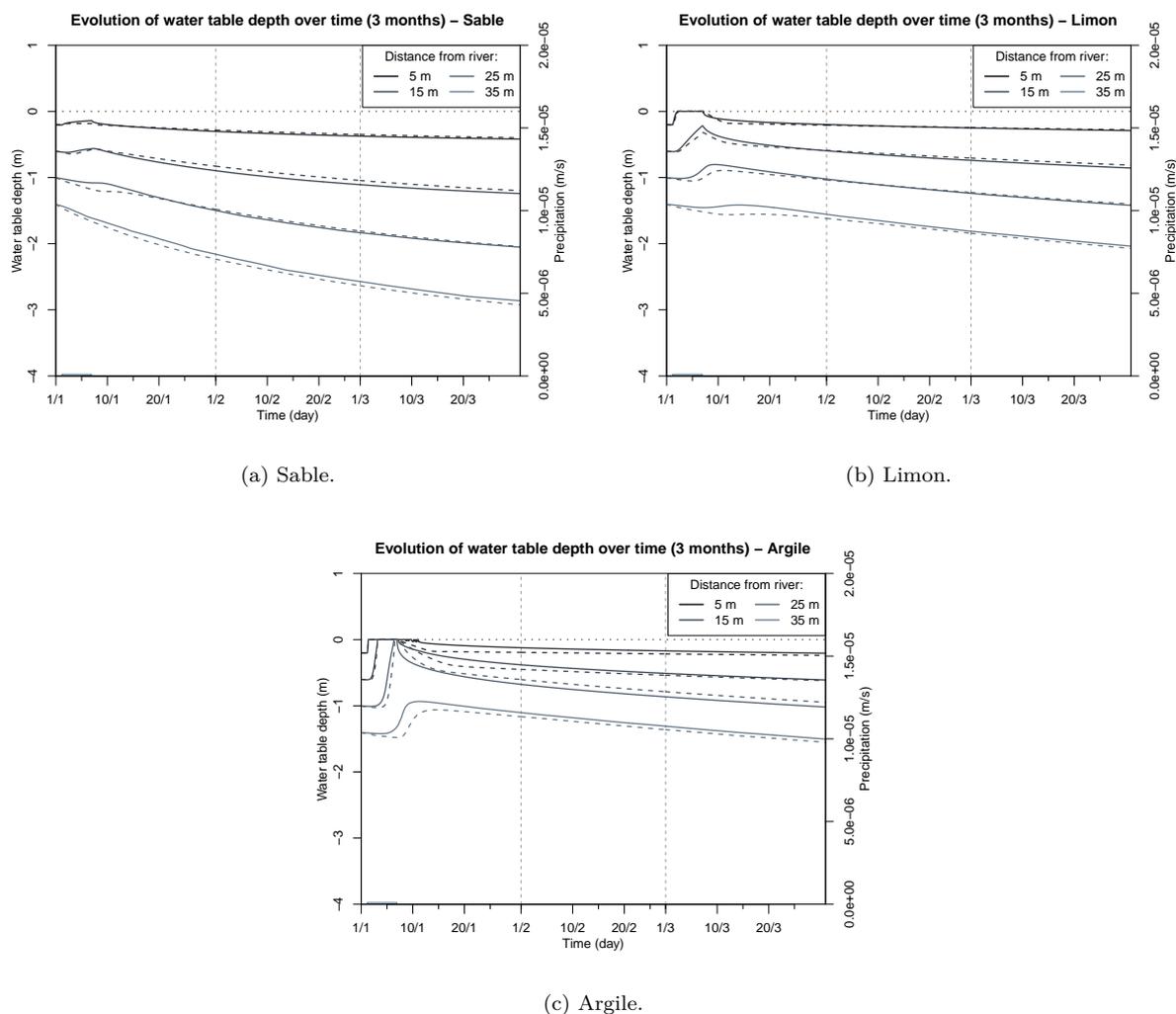


Fig. 3.10 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Cas test 2.

On note toutefois un retard systématique de la hausse du niveau de la nappe dans le modèle 1D. Ceci s'explique par le fait qu'en 2D la hausse du niveau de la nappe dû à un apport d'eau vertical conduit à un phénomène de diffusion autour de cette variation ponctuelle du niveau de la nappe. On assiste alors un transfert d'eau latéral, non pris en compte dans le modèle 1D. Dans le cas de précipitations, ce mouvement de diffusion latérale vers l'amont précède l'arrivée de l'eau précipitée dans la zone saturée, d'où cette impression de retard. La non prise en compte de cette diffusion latérale conduit également à un niveau de recharge légèrement plus bas dans le modèle 1D.

On peut également relever que la décharge d'une nappe qui a atteint la surface du sol n'est pas correctement représentée (cf. figure 3.10(c)). Dans certains cas (par exemple $L = 5$ m et 15 m du sol "Argile"), la décharge 1D est plus rapide qu'elle ne devrait l'être, tandis que dans d'autres cas (par exemple $L = 25$ m de ce même sol), elle est plus lente. Ces différences s'expliquent par le fait que le modèle tel que défini actuellement ne permet pas d'avoir une longueur de suintement x_{suint} supérieure à L , la distance entre la colonne étudiée et la rivière. Aucune évolution du modèle de nappe lorsque la colonne étudiée est entièrement saturée n'a été proposée (figure 3.11).

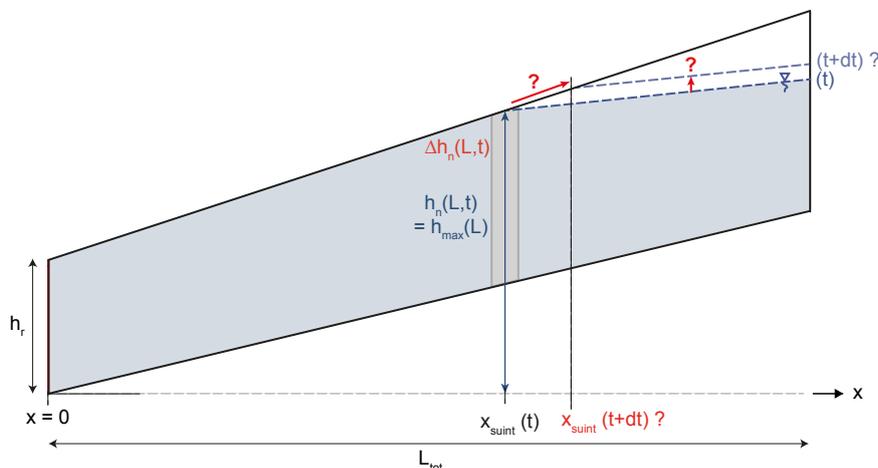


Fig. 3.11 – Limite du modèle de recharge de la nappe lorsque la colonne est saturée.

Néanmoins, dans tous les cas, on peut remarquer une convergence des résultats à la fin des trois mois de simulations, ce qui est un point positif pour la poursuite des simulations. Les écarts qui peuvent apparaître lors des phases de charge/décharge ne sont pas ou peu conservés au-delà, ce qui permettra d'éviter une accumulation des erreurs suite à une succession d'épisodes pluvieux.

3.5.4 Cas 3

Pour ce dernier cas où la pluie est prise à 10^{-8} m/s, les rapports précipitations sur conductivité hydraulique valent respectivement 8,1 %, 35 %, 139 % pour les sols de type "Sable", "Limon" et "Argile". Les résultats pour les trois types de sol sont présentés sur les figures 3.12(a) à 3.12(c).

Ici, pratiquement tous les niveaux de nappe atteignent la surface. Les remarques du paragraphe précédent se trouvent confirmées par ce nouveau cas test.

On peut ajouter que les résultats du modèle 1D convergent d'autant plus rapidement vers les résultats 2D que les dynamiques de nappe sont rapides (convergence plus rapide pour le sol de type "Sable" que pour le "Limon", qui est elle-même plus rapide que pour l'"Argile").

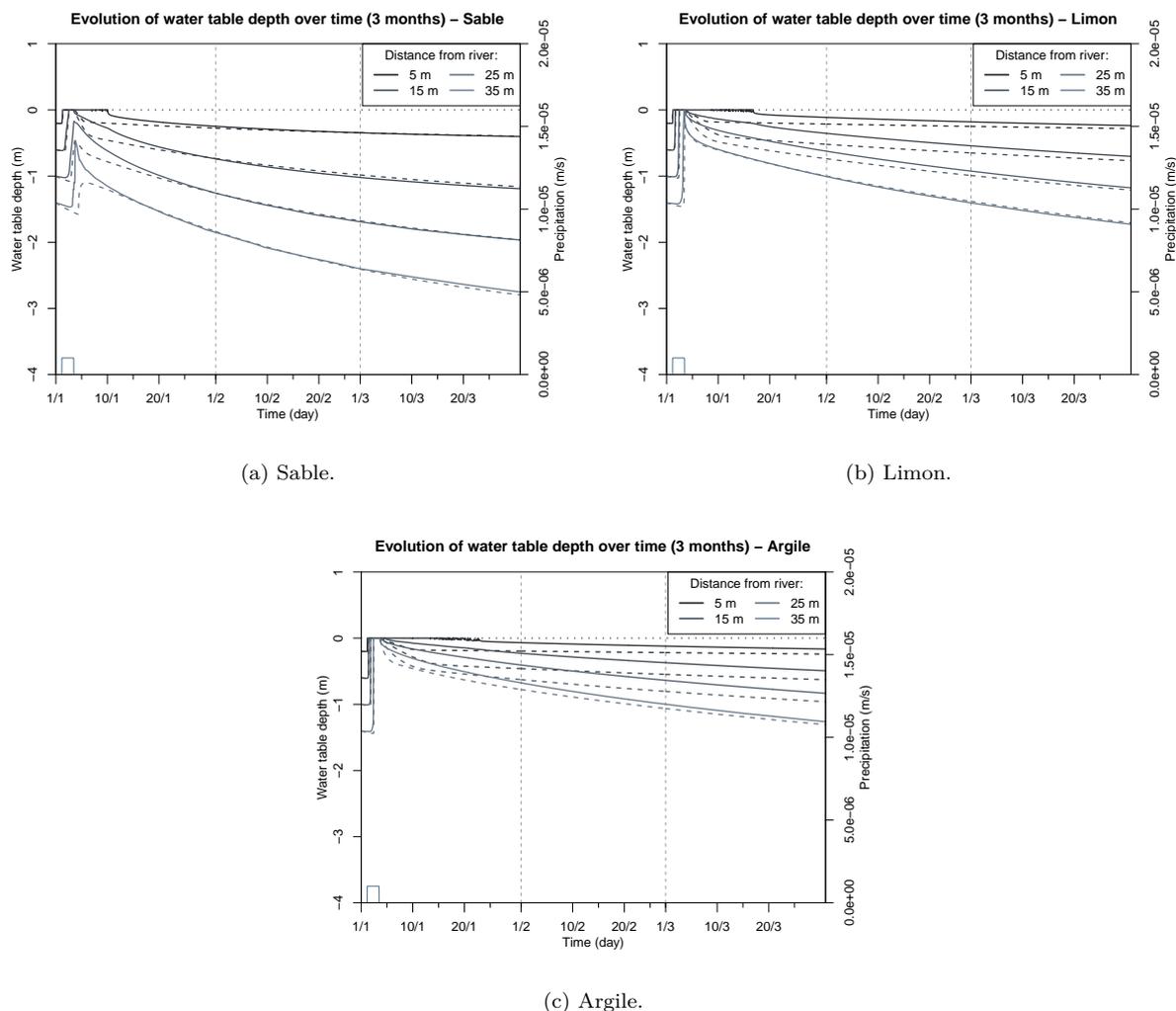


Fig. 3.12 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Cas test 3.

3.5.5 Bilan

En résumé, l'impact des précipitations sur l'évolution du toit de la nappe est globalement bien pris en compte dans le modèle 1D. Les phases de charge, décharge rapide après la recharge puis décharge plus lente sont bien représentées. On peut cependant relever quelques limites.

Limite 3 : existence d'un retard du modèle 1D lors des phases de recharge.

Limite 4 : le cas particulier d'une colonne totalement saturée, qui est un cas limite du modèle de nappe actuel.

Toutefois, il est intéressant de noter que malgré les différences qui peuvent apparaître au cours des phases de charge/décharge, les résultats du modèle 1D convergent vers ceux du modèle 2D. Cette convergence est observée plus tôt pour les sols à dynamique plus rapide (comme le "Sable").

Chapitre 4

Évaporation - Transpiration

Cette partie a pour objectif d'ajouter les processus d'évaporation et de transpiration. L'évaporation et la transpiration sont des flux d'eau du sol vers l'atmosphère qui répondent à une certaine "demande atmosphérique". Les flux réels sont ajustés en fonction de la disponibilité de l'eau dans le sol. Cet ajustement est généralement modélisé par une fonction par morceaux dépendant de la teneur en eau dans le sol $\theta(x, z)$ (figure 4.1), et du profil vertical de prise d'eau (typiquement le profil racinaire pour la transpiration).

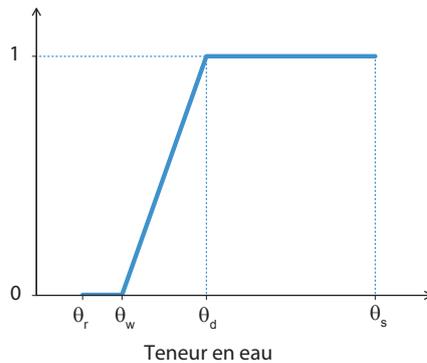


Fig. 4.1 – Fonction de limitation des flux d'évapotranspiration en fonction de la teneur en eau du sol.

Ainsi, pour un même profil de teneur en eau et un même forçage atmosphérique, les flux d'évapotranspiration seront identiques. Ils ne doivent donc pas être impactés par le passage d'un modèle 2D à un modèle de colonne verticale.

La présence de la rivière, modélisée par une charge imposée en aval du versant, a néanmoins un impact sur les niveaux de nappe à proximité de la rivière. Cette charge imposée a tendance à soutenir le niveau de la nappe en compensant partiellement les flux d'évapotranspiration. Pour illustrer l'existence de ce couplage, on propose de comparer les résultats d'une simulation de versant 2D dans laquelle un flux d'évaporation est constant au cours du temps avec des simulations de colonne 1D utilisant le terme de drainage établi précédemment et en imposant à la colonne le même flux d'évaporation. Les résultats sont présentés sur la figure 4.2. Les résultats du modèle 2D sont représentés en traits continus, tandis que ceux du modèle 1D sont en pointillés. On remarque que l'ajout d'un flux d'évapotranspiration n'affecte pas la qualité des résultats pour les distances les plus éloignées de la rivière ($L = 25$ et 35 m). En revanche, les résultats 1D pour une distance de 5 et 15 m présentent une erreur importante, due à une décroissance plus rapide du niveau de la nappe dans le modèle de colonne. Cet écart est d'autant plus important que la colonne modélisée est proche de la rivière. Ceci vient confirmer l'hypothèse que la rivière joue un rôle de compensation des flux d'évapotranspiration.

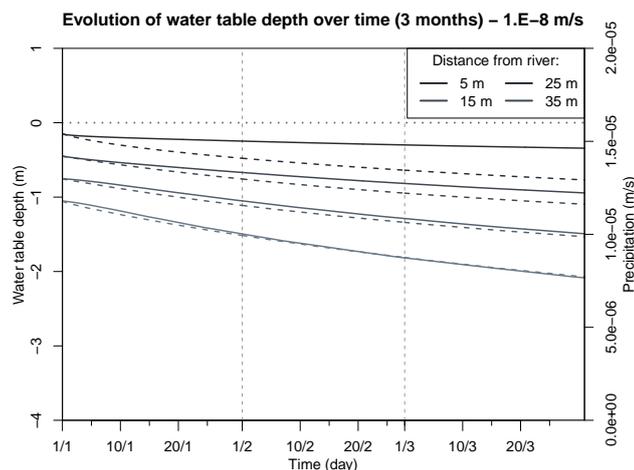


Fig. 4.2 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol, avec un flux d'évaporation de 1.10^{-8} m/s.

Nous allons donc tenter d'incorporer ce couplage avec la rivière dans le modèle 1D actuel, afin de corriger l'écart important dans les colonnes proches de la rivière. Pour s'inscrire dans la démarche utilisée jusqu'à présent, la compensation des flux d'évapotranspiration sera directement intégrée au terme de drainage.

4.1 Modèle de nappe

Afin d'évaluer uniquement l'apport de la rivière par rapport aux flux sortants d'évapotranspiration, nous allons considérer un versant à fond et surface planes. Sans rivière et avec une nappe initialement horizontale, le niveau de la nappe baisse uniformément au cours du temps. On suppose que la présence de la rivière conduit à un **niveau de nappe linéaire** à pente non nulle, intersectant la surface du sol au niveau de la rivière (figure 4.3).

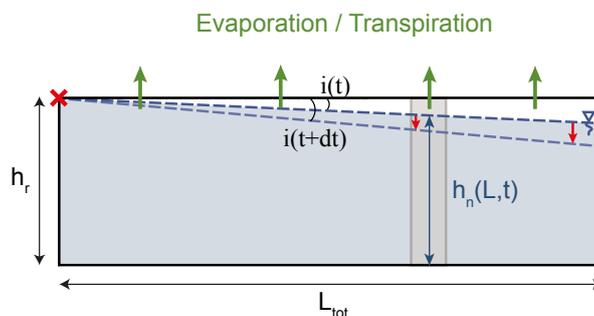


Fig. 4.3 – Modèle de nappe et son évolution suite au couplage rivière/évapotranspiration.

On retrouve ici la même configuration que pour la décharge simple. On peut donc utiliser l'hypothèse 1 (cf. 2.1.1) ainsi que l'équation 2.1.

4.2 Bilan d'eau

La variation de volume d'eau du versant vaut ici le flux traversant la section représentant la rivière ajouté aux flux d'évapotranspiration. En appliquant l'équation 2.2, on a :

$$Q_{\text{out}} = -\frac{dV_{\text{eau}}}{dt} = K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) + (Ev + Tr) \times L_{\text{tot}} \quad (4.1)$$

avec $i(t)$, l'angle formé par la nappe (pris négatif ici), Ev et Tr , les flux d'évaporation et de transpiration (pris positifs).

4.3 Variation du volume d'eau

Dans le versant

La géométrie utilisée comme référence correspond à un cas particulier du cas 1 de la partie 2 (Décharge simple). L'équation 2.5 est donc valide, et est rappelée ci-dessous :

$$\frac{dV_{\text{eau}}}{dt} = (\theta_s - \theta_r) \times \frac{1}{L} \times \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \times \left(\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t) \right)$$

avec $\varphi_1(t) = \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times [1 + D(t)^n x^n]^{-m} dx$,
 $D(t) = \beta(\tan \gamma - \tan i(t))$.

Dans une colonne

La variation du volume d'eau dans une colonne correspond à l'équation 2.6 établie dans la partie 2 :

$$\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = (\theta_s - \theta_r) \frac{\partial h_n}{\partial t}(L, t) \psi(L, t)$$

avec $\psi(L, t) = 1 - [1 + \beta^n (H(L) - h_n(L, t))^n]^{-m}$.

On peut également ajouter que la variation du volume d'eau dans une colonne vaut :

$$\frac{\partial V_{\text{eau}}^{\text{col}}}{\partial t}(L, t) = \Delta_{\text{drainage}}(L, t) - (Ev + Tr) \quad (4.2)$$

Bilan

On déduit des équations 2.5, 2.6 et 4.2 :

$$\Delta_{\text{drainage}}(L, t) = \frac{dV_{\text{eau}}}{dt}(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} + Ev + Tr$$

En utilisant 4.1 :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{drainage}}(L, t) &= (-K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) - (Ev + Tr) \times L_{\text{tot}}) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} + Ev + Tr \\ &= -K_{\text{sat}} h_r \tan i(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} - (Ev + Tr) \times L_{\text{tot}} \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} + Ev + Tr \end{aligned}$$

Au vu de l'équation du terme de drainage 2.15 pour le cas $i(t) \in]i_{\text{lim}}; \gamma[$, qui correspond au seul cas qui peut être rencontré avec la géométrie à fond et surface planes, on en déduit que :

$$\Delta_{\text{drainage}}(L, t) = \Delta_{\text{drainage1}}(L, t) - (Ev + Tr) \times L_{\text{tot}} \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} + Ev + Tr$$

Nous obtenons ainsi le terme de compensation de l'évapotranspiration :

$$\Delta_{\text{comp}}(L, t) = Ev + Tr - (Ev + Tr) \times L_{\text{tot}} \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)}$$

En $L = 0$, $\Delta_{\text{comp}}(L = 0, t) = Ev + Tr$, ce qui signifie que l'ensemble des flux d'évapotranspiration sont compensés, ce qui est cohérent avec le fait que l'on impose une hauteur de nappe constante en $L = 0$. Lorsque L augmente, $\Delta_{\text{comp}}(L, t)/(Ev + Tr)$ diminue et peut devenir négatif, ce qui signifierait un retrait supplémentaire d'eau dans les colonnes concernées. Ceci n'a pas de sens physique. La distance L à laquelle $\Delta_{\text{comp}}(L, t)$ s'annule correspond à la limite d'influence de la rivière sur la compensation des flux d'évapotranspiration. Au-delà, le couplage avec la rivière est inexistant donc on doit imposer $\Delta_{\text{comp}}(L, t) = 0$.

Le terme de compensation final de l'évapotranspiration est donc le suivant :

$$\Delta_{\text{comp}}(L, t) = \max \left(0 ; (Ev + Tr) \times \left(1 - L_{\text{tot}} \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} \right) \right) \quad (4.3)$$

et le terme de drainage est adapté de la manière suivante :

$$\boxed{\Delta_{\text{drainage}}^{\text{nouveau}}(L, t) = \Delta_{\text{drainage}}(L, t) - \Delta_{\text{comp}}(L, t)} \quad (4.4)$$

4.4 Cas tests

4.4.1 Description

Afin d'évaluer ce terme de compensation des flux d'évapotranspiration, quelques cas tests ont été réalisés. Ils consistent en un flux d'évaporation ou de transpiration constant au cours de la simulation. L'intérêt de tester séparément l'évaporation et la transpiration est de vérifier si la qualité des résultats est sensible au profil vertical de prise d'eau.

Pour l'ensemble des cas tests, la géométrie du versant 2D est la géométrie n°1 des cas tests de décharge (cf. tableau 2.1). Seul le sol de type "Limon" a été testé ici. Les différents cas tests sont décrits dans le tableau 4.1.

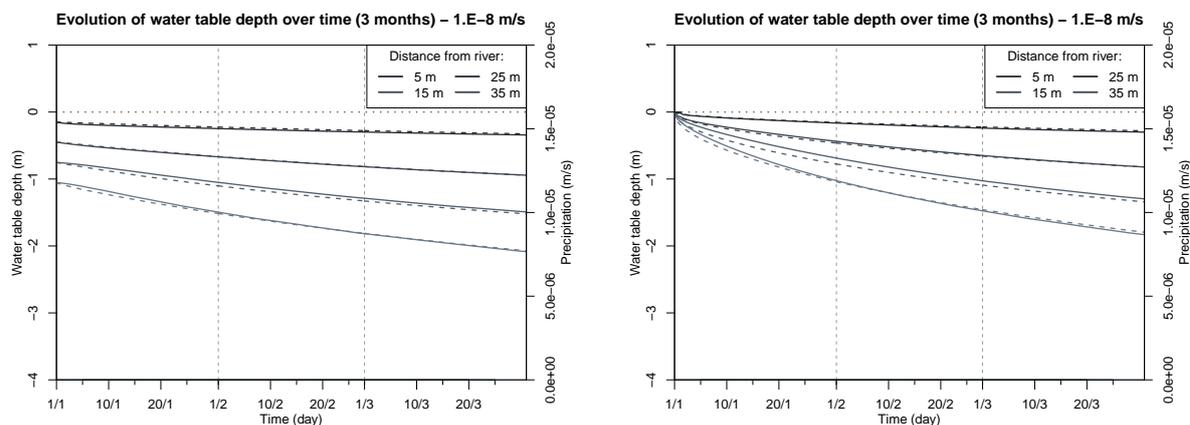
Cas tests	Évaporation	Transpiration	$\tan i(t = 0)$
1	10^{-8} m/s		7 % et 10 %
2	2×10^{-8} m/s		7 % et 10 %
3		2×10^{-8} m/s	7 % et 10 %

Tab. 4.1 – Cas tests d'évapotranspiration.

4.4.2 Cas 1

Le premier cas test correspond à un flux d'évaporation de 10^{-8} m/s pour deux configurations initiales de nappe. Les résultats sont présentés sur les figures 4.4(a) et 4.4(b). Sont représentés sur ces figures l'évolution du niveau de la nappe à différentes distances de la rivière (5 m, 15 m, 25 m et 35 m) du modèle de versant 2D (traits continus) et du modèle de colonne 1D (traits pointillés), sur une période de 3 mois.

On remarque une très bonne correspondance entre les résultats 2D et ceux du modèle 1D quelle que soit la distance à la rivière.



(a) $\tan i(t = 0) = 7\%$.

(b) $\tan i(t = 0) = 10\%$.

Fig. 4.4 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Cas test 1.

Afin de mettre en avant l'apport du terme de compensation sur les résultats, ont été ajoutés sur les figures 4.5(a) et 4.5(b) les résultats du même modèle de colonne mais sans le terme de compensation (en petits pointillés). Pour les distances les plus éloignées de la rivière ($L = 25$ et 35 m), le terme de compensation n'a aucun impact, alors qu'il est très important dans les autres cas.

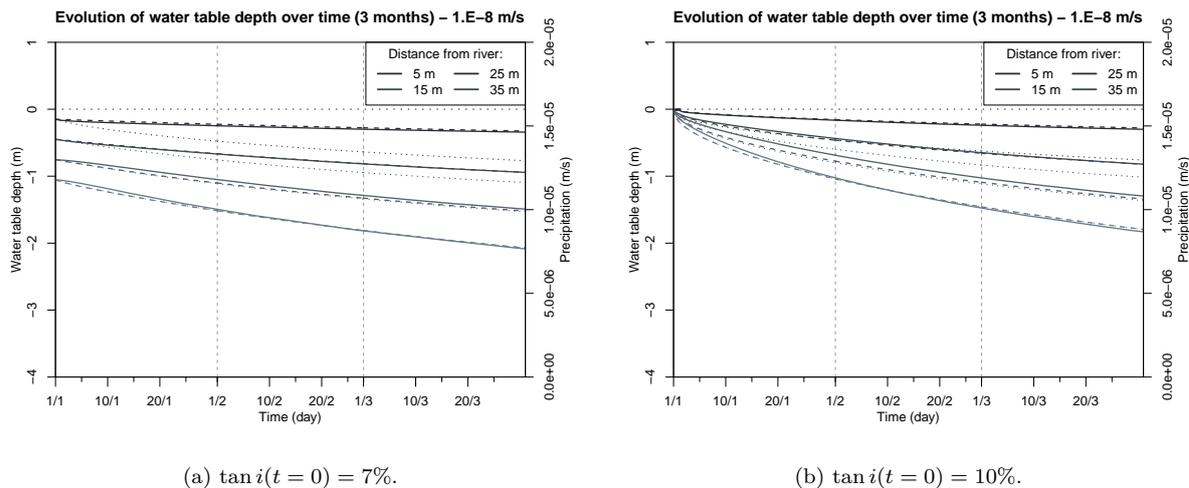


Fig. 4.5 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus), 1D sans le terme de compensation (en pointillés) et 1D avec le terme de compensation (en traits discontinus) pour différents types de sol - Cas test 1.

4.4.3 Cas 2

Dans ce cas, l'évaporation est de 2×10^{-8} m/s. Les résultats 2D, 1D avec le terme de compensation et 1D sans le terme de compensation sont représentés sur les figures 4.6(a) et 4.6(b). On remarque que malgré l'augmentation du flux d'évaporation, les résultats du modèle avec le terme de compensation restent très bons.

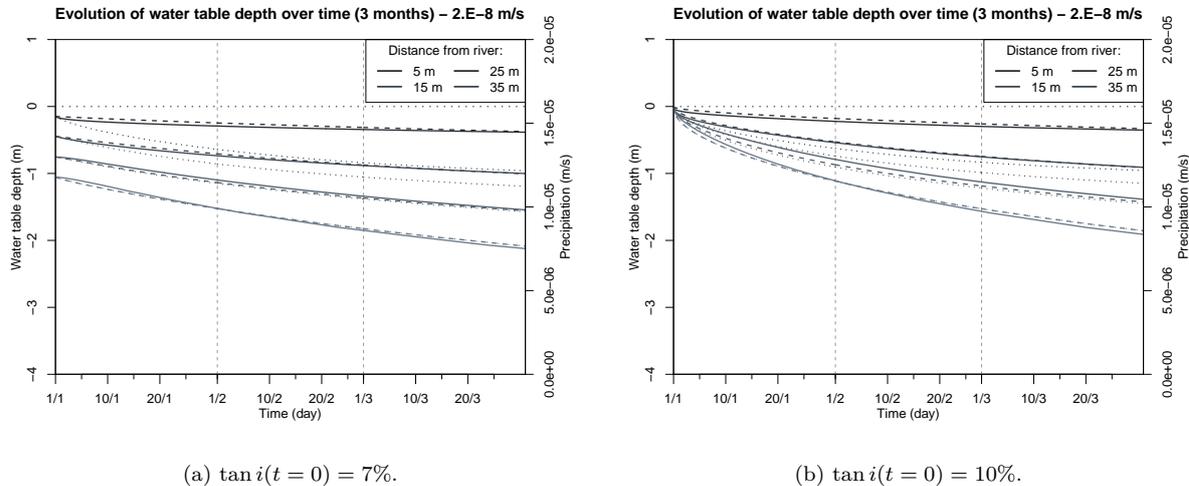
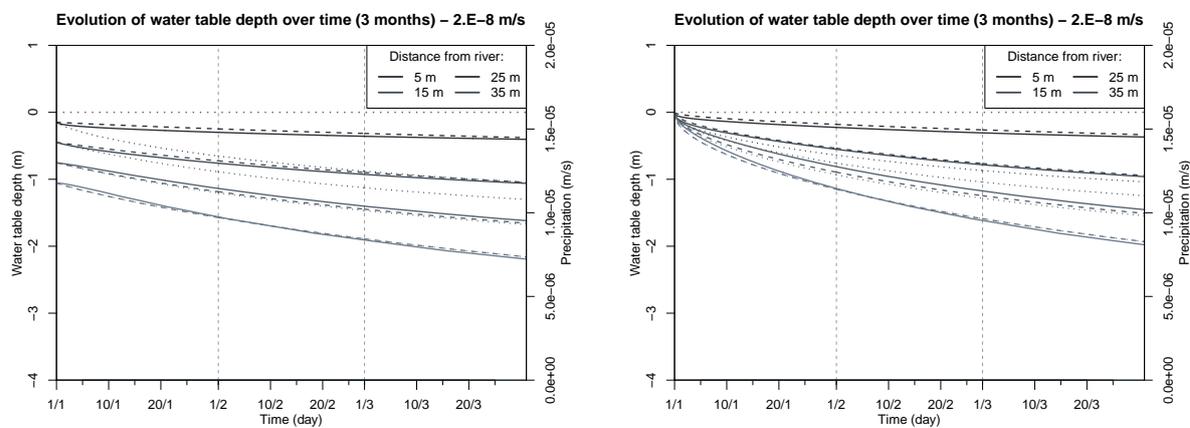


Fig. 4.6 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus), 1D sans le terme de compensation (en pointillés) et 1D avec le terme de compensation (en traits discontinus) pour différents types de sol - Cas test 2.

4.4.4 Cas 3

Ce cas test correspond à un flux de transpiration de 2×10^{-8} m/s. Les résultats sont présentés sur les figures 4.7(a) et 4.7(b). On peut noter que le changement de profil vertical d'extraction d'eau n'a pas d'impact sur la qualité des résultats.



(a) $\tan i(t = 0) = 7\%$.

(b) $\tan i(t = 0) = 10\%$.

Fig. 4.7 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus), 1D sans le terme de compensation (en pointillés) et 1D avec le terme de compensation (en traits discontinus) pour différents types de sol - Cas test 3.

Chapitre 5

Cas général

5.1 Terme de drainage

Pour résumer, le "terme de drainage" est un terme puits placé en fond d'une colonne 1D. Il répond à différentes formules selon que le modèle de colonne identifie une phase de recharge ou une phase de décharge et selon la présence ou non d'une zone de suintement. Il est ensuite dans tous les cas ajusté en fonction d'un terme de compensation de l'évapotranspiration.

$$\text{Drainage} = \begin{cases} \Delta_{\text{drainage1}}(L, t) - \Delta_{\text{comp}}(L, t) & \text{si } x_{\text{suint}}(t) = 0 \\ \Delta_{\text{drainage2}}(L, t) - \Delta_{\text{comp}}(L, t) & \text{si } x_{\text{suint}}(t) > 0 \text{ et si } L \leq L_{\text{suint}}(t) \\ f_1(L_{\text{suint}}(t)) \times \Delta_{\text{drainage1}}(L, t) + f_2(L_{\text{suint}}(t)) \times \Delta_{\text{drainage2}}(L, t) - \Delta_{\text{comp}}(L, t) & \text{si } x_{\text{suint}}(t) > 0 \text{ et si } L > L_{\text{suint}}(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\Delta_{\text{drainage1}}(L, t) = \begin{cases} -Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) \times (n+2) \times \frac{L^{n+1}}{L_{\text{tot}}^{n+2}} & \text{si } i(t) = \gamma \\ -Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} & \text{si } i(t) \in]i_{\text{lim}}; \gamma[\\ -Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_2(t)} & \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[\text{ et si } L < L_{\text{lim}}(t) \\ -K_r(z=0) & \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim}}[\text{ et si } L \geq L_{\text{lim}}(t) \end{cases}$$

$$\Delta_{\text{drainage2}}(L, t) = \begin{cases} - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (n+1)(n+2) \frac{(L_{\text{tot}} - L)L^n}{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^{n+2}} \\ \quad \text{si } i(t) = \gamma \\ - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (L_{\text{tot}} - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t)} \\ \quad \text{si } i(t) \in]i_{\text{lim2}}; \gamma[\\ - (Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) + Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t)) \times (L_{\text{lim2}}(t) - L) \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{A(t)}{2} - \varphi_4(t)} \\ \quad \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim2}}[\text{ et si } L < L_{\text{lim2}}(t) \\ -K_r(z=0) \\ \quad \text{si } i(t) \in]-\frac{\pi}{2}; i_{\text{lim2}}[\text{ et si } L \geq L_{\text{lim2}}(t) \end{cases}$$

$$\Delta_{\text{comp}}(L, t) = \max \left(0 ; (Ev + Tr) \times \left(1 - L_{\text{tot}} \times L \times \frac{\psi(L, t)}{\frac{L_{\text{tot}}^2}{2} - \varphi_1(t)} \right) \right) \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} f_1(X) = 1 - f_2(X) \\ f_2(X) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan(-C \times \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{X-L} \right)) \right) \end{cases}$$

$$L_{\text{suint}}(t) = \begin{cases} L_{\text{tot}} & \text{si } g(X = L_{\text{tot}}) \leq 0 \\ \text{l'unique solution de } g(X) = 0 & \text{si } g(X = L_{\text{tot}}) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } i_{\text{lim}} &= \arctan \left(\tan \alpha - \frac{h_r}{L_{\text{tot}}} \right), \\
i_{\text{lim}2} &= \arctan \left(\tan \alpha - \frac{h_r}{L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t)} \right), \\
L_{\text{lim}}(t) &= \frac{h_r}{\tan \alpha - \tan i(t)}, \\
L_{\text{lim}2}(t) &= \frac{h_r + x_{\text{suint}}(t)(\tan \gamma - \tan i(t))}{\tan \alpha - \tan i(t)}, \\
\psi(L, t) &= \left(1 - \left[1 + \beta^n (h_r + L \tan \gamma - h_n(L, t))^n \right]^{-m} \right), \\
\varphi_1(t) &= \int_{x=0}^{L_{\text{tot}}} x \times \left[1 + D(t)^n x^n \right]^{-m} dx, \\
\varphi_2(t) &= \int_{x=0}^{L_{\text{lim}}(t)} x \times \left[1 + D(t)^n x^n \right]^{-m} dx + \int_{x=L_{\text{lim}}(t)}^{L_{\text{tot}}} x \times \left[1 + D_2^n x^n \right]^{-m} dx, \\
\varphi_3(t) &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left[1 + D^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{tot}} - x) dx, \\
\varphi_4(t) &= \int_{x=x_{\text{suint}}(t)}^{L_{\text{lim}2}(t)} \left[1 + D(t)^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{lim}2}(t) - x) dx \\
&\quad + \int_{x=L_{\text{lim}2}(t)}^{L_{\text{tot}}} \left[1 + D_2^n (x - x_{\text{suint}}(t))^n \right]^{-m} (L_{\text{lim}2}(t) - x) dx, \\
D(t) &= \beta(\tan \gamma - \tan i(t)), \\
D_2 &= \beta(\tan \gamma - \tan \alpha), \\
A(t) &= (L_{\text{lim}2}(t) - x_{\text{suint}}(t))^2 - (L_{\text{tot}} - L_{\text{lim}2}(t))^2, \\
Q_{\text{out}}^{\text{sol}}(t) &= K_{\text{sat}} h_r \tan i(t), \\
Q_{\text{out}}^{\text{ruiss}}(t) &= K_{\text{sat}} x_{\text{suint}}(t) (\tan \gamma)^2, \\
C &= -\tan \left(0,8 \times \frac{\pi}{2} \right) \times \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 - L_{\text{tot}}}}, \\
x_0 &= \frac{3}{4} L_{\text{tot}}, \\
g(X) &= \left[\left(L_{\text{tot}} (X - x_{\text{suint}}(t)) - \frac{X^2}{2} + \frac{x_{\text{suint}}^2(t)}{2} \right) \right] \\
&\quad \times \left[1 - \left[1 + \beta^n \left(\frac{X - x_{\text{suint}}(t)}{2} \times (\tan \gamma - \tan i(t)) \right)^n \right]^{-m} \right] \\
&\quad - \frac{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma}{x_{\text{suint}}(t) \tan \gamma + h_r} \left(\frac{(L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t))^2}{2} - \varphi_3(t) \right).
\end{aligned}$$

et Ev et Tr , les flux d'évaporation et de transpiration.

5.2 Implémentation dans Cast3M

Pour le calcul du terme de drainage et la mise à jour de la valeur des différents paramètres du modèle ($\tan i, x_{\text{suint}}, h_n(L_{\text{tot}})$), on se place à l'initialisation du pas de temps ($t+dt$). Le pas de temps (t) a été résolu, donc $h_n(t)$ est connu.

Le fichier procédure est décomposé en deux cas principaux :

- Phase de décharge si $h_n(t - dt) - h_n(t) < 0$,
- Phase de recharge si $h_n(t - dt) - h_n(t) \geq 0$.

La détermination du type de phase dans laquelle le modèle se trouve est donc faite sur le pas de temps antérieur.

Phase de décharge

Cas 1 : $x_{\text{suint}}(t) = 0$. Il s'agit du cas de décharge simple étudié dans la partie 2. On applique l'hypothèse 1 (cf 2.1.1).

$$\begin{cases} \tan i(t + dt) = \frac{h_n(t) - h_r}{L} \\ x_{\text{suint}}(t + dt) = 0 \\ h_n(L_{\text{tot}}, t + dt) = h_r + L_{\text{tot}} \times \tan i(t + dt) \end{cases}$$

Le terme de drainage vaut alors $\Delta_{\text{drainage1}}(L, t + dt)$.

Cas 2 : $x_{\text{suint}}(t) > 0$. Il s'agit du cas de décharge après un épisode pluvieux étudié dans la partie 3. On utilise ici l'hypothèse 5 (cf. 3.1.2), l'équation (3.1) et l'hypothèse 3 (cf. 3.1.1).

$$\begin{cases} h_n(L_{\text{tot}}, t + dt) = h_n(L_{\text{tot}}, t) \\ \tan i(t + dt) = \frac{h_n(L_{\text{tot}}, t + dt) - h_n(t)}{L_{\text{tot}} - L} \\ x_{\text{suint}}(t + dt) = \frac{h_n(L_{\text{tot}}, t + dt) - h_r - L_{\text{tot}} \times \tan i(t + dt)}{\tan \gamma - \tan i(t + dt)} \end{cases}$$

Si $x_{\text{suint}}(t + dt)$ ainsi calculé est négatif ou nul, le pas de temps $(t + dt)$ marque la fin de la période présentant une zone de suintement. Ceci signifie que ce pas de temps est à rattacher à une décharge simple. On actualise alors les paramètres comme dans le cas 1.

$$\begin{cases} \tan i(t + dt) = \frac{h_n(t) - h_r}{L} \\ x_{\text{suint}}(t + dt) = 0 \\ h_n(L_{\text{tot}}, t + dt) = h_r + L_{\text{tot}} \times \tan i(t + dt) \end{cases}$$

Et le terme de drainage vaut $\Delta_{\text{drainage1}}(L, t)$.

Sinon, on détermine $L_{\text{suint}}(t + dt)$ en fonction de $x_{\text{suint}}(t)$ et $\tan i(t)$ en résolvant numériquement l'équation $g(X) = 0$ (cf. équation 3.22). La méthode retenue est une résolution par dichotomie.

On compare alors L à $L_{\text{suint}}(t + dt)$. Si $L \leq L_{\text{suint}}(t + dt)$, la colonne étudiée est dans la zone d'influence de la zone de suintement (cf. section 3.4.2), et le terme de drainage vaut $\Delta_{\text{drainage2}}(L, t + dt)$.

Si $L > L_{\text{suint}}(t + dt)$, le terme de drainage vaut $f_1(L_{\text{suint}}(t + dt)) \times \Delta_{\text{drainage1}}(L, t + dt) + f_2(L_{\text{suint}}(t + dt)) \times \Delta_{\text{drainage2}}(L, t + dt)$.

Phase de recharge

Au cours d'un pas de temps en phase de recharge, au vu des hypothèses 3 et 4 (cf. 3.1.1), les paramètres du modèle sont mis à jour de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tan i(t + dt) = \tan i(t) \\ x_{\text{suint}}(t + dt) = \frac{h_n(L, t) - h_r - L \tan i(t + dt)}{\tan \gamma - \tan i(t + dt)} \\ h_n(L_{\text{tot}}, t + dt) = h_r + x_{\text{suint}}(t + dt) \tan \gamma + (L_{\text{tot}} - x_{\text{suint}}(t + dt)) \tan i(t + dt) \end{cases}$$

On détermine alors $L_{\text{suint}}(t + dt)$ en fonction de $x_{\text{suint}}(t)$ et $\tan i(t)$. Comme en phase de décharge, si $L \leq L_{\text{suint}}(t + dt)$, le terme de drainage vaut $\Delta_{\text{drainage2}}(L, t + dt)$. Sinon, il vaut $f_1(L_{\text{suint}}(t + dt)) \times \Delta_{\text{drainage1}}(L, t + dt) + f_2(L_{\text{suint}}(t + dt)) \times \Delta_{\text{drainage2}}(L, t + dt)$.

5.3 Cas tests

5.3.1 Cas synthétique

Pour le premier cas test appliquant la version complète du terme de drainage, nous nous basons, comme jusqu'à présent, sur une comparaison entre les résultats sur un versant 2D de géométrie simple et différentes colonnes 1D. La géométrie ici retenue est la géométrie n°1 des cas tests de la partie 2 (cf. tableau 2.1). Le forçage climatique nécessaire aux simulations sous *Cast3m* (c'est-à-dire précipitations et évapotranspiration) provient d'un forçage climatique réel extrait de la base Fluxnet. Le site choisi est le site italien "Amplero" avec son forçage pour l'année 2004. L'adaptation des données Fluxnet aux variables nécessaires pour *Cast3m* a été réalisée via le modèle de surface continentale *Orchidée* (cf. rapport de stage).

Les résultats pour les distances $L = 25$ m et 35 m sont présentés sur les figures 5.1(a) à 5.1(d). Ces figures représentent l'évolution du niveau de la nappe au cours du temps par période de 3 mois. Les résultats du versant 2D sont en traits pleins, tandis que les résultats des colonnes 1D sont en pointillés.

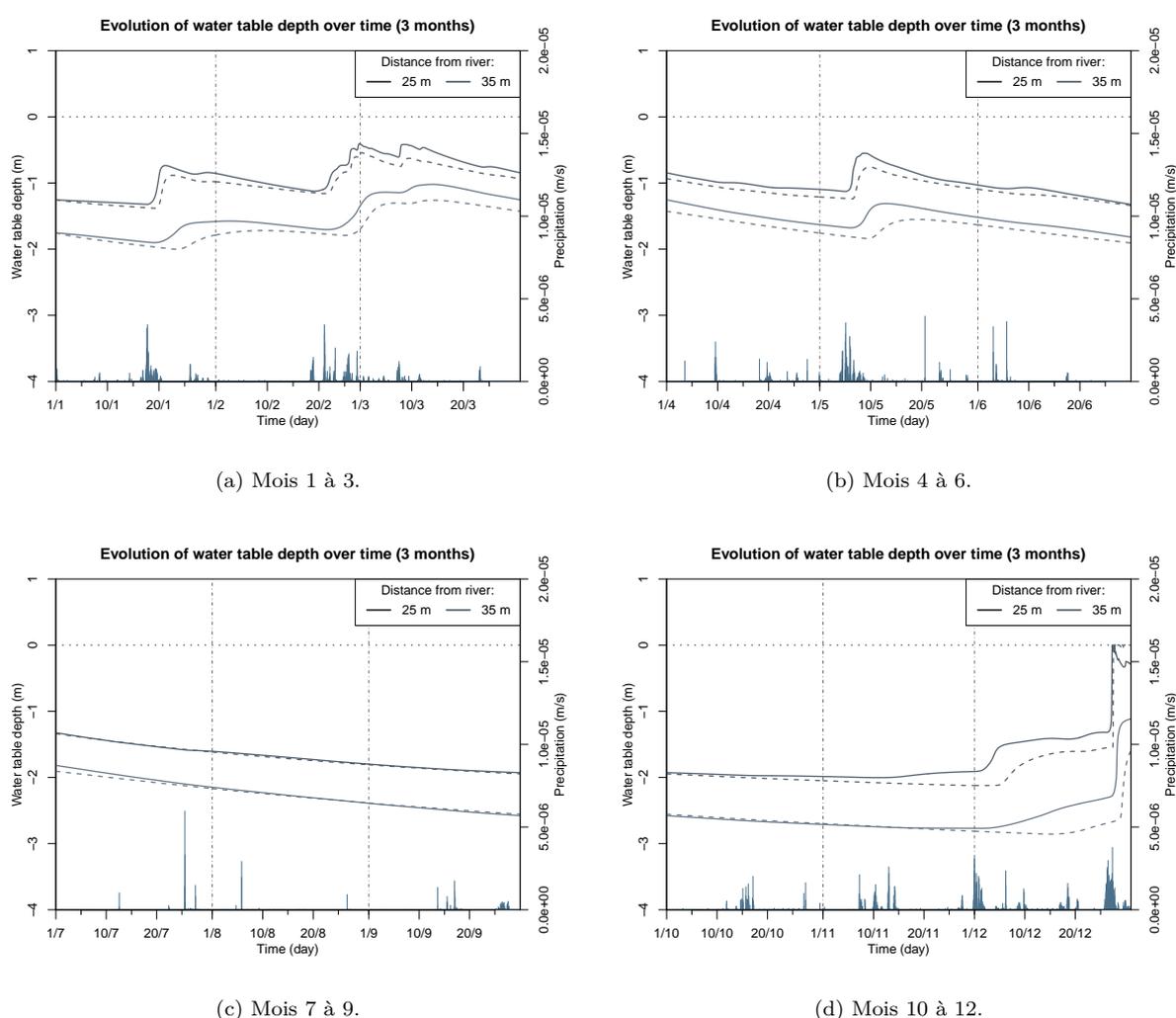


Fig. 5.1 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Forçage Orchidée.

On observe que les résultats 1D suivent bien la dynamique des résultats 2D, avec une bonne représentation des trois phases précédemment identifiées : les phases de décharge, de recharge et de décharge rapide après un épisode pluvieux. Ces trois phases sont particulièrement visibles au cours du mois 5 ($L = 25$ m). On note néanmoins l'existence d'un décalage entre les courbes, essentiellement pendant les périodes de recharge (mois 1 à 5 puis mois 11 et 12). On retrouve également le retard au début des phases de recharge, qui a été précédemment évoqué dans l'analyse des résultats de cas tests de la partie 3.

Le décalage observé, en particulier sur les premiers mois, peut s'expliquer par une certaine mise à l'équilibre du toit de nappe dans la simulation 2D. Pour compenser, il est possible d'imposer un état initial dans les colonnes 1D légèrement différent de l'état initial en 2D. En particulier, en imposant un niveau de nappe initialement plus élevé de 12 cm en 1D par rapport au 2D, on peut constater une forte amélioration des résultats sur les figures 5.2(a) à 5.2(d).

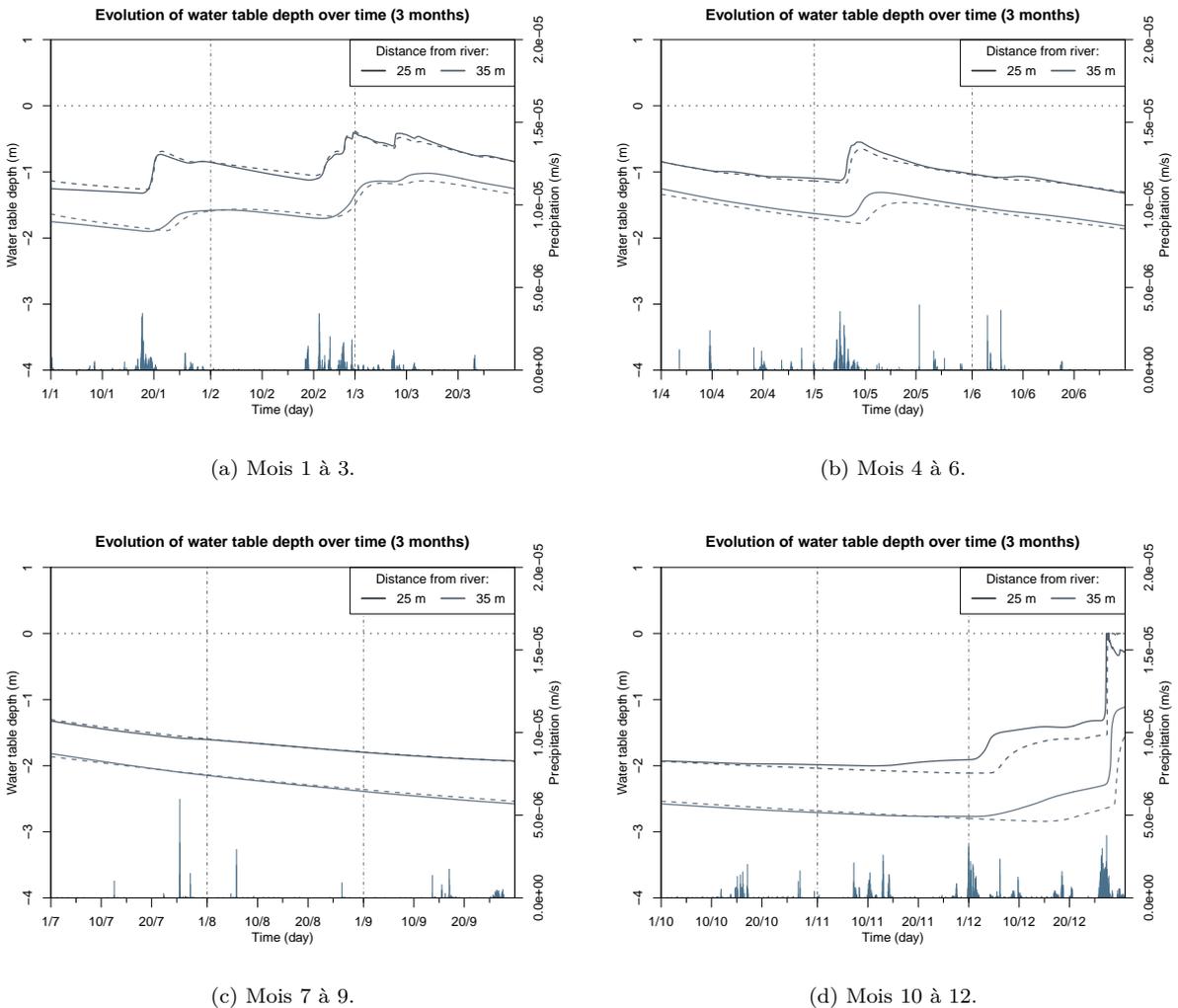


Fig. 5.2 – Comparaison des évolutions temporelles de la profondeur de la nappe obtenues avec les modèles 2D (en traits continus) et 1D (en pointillés) pour différents types de sol - Forçage Orchidée - Condition initiale différente pour les modèles 1D que sur les figures 5.1(a) à 5.1(d).

5.3.2 Bassin versant du Strengbach

Présentation

Le bassin versant du Strengbach est un petit bassin versant montagnard (80 ha) situé dans le massif vosgien, à environ 58 km au sud-ouest de Strasbourg (cf. figure 5.3). Il est soumis à un climat océanique montagnard avec des précipitations annuelles de l'ordre de 1400 mm et des températures moyennes mensuelles variant de -2°C à $+14^{\circ}\text{C}$. Son modèle numérique de terrain (MNT) est reporté sur la figure 5.4.

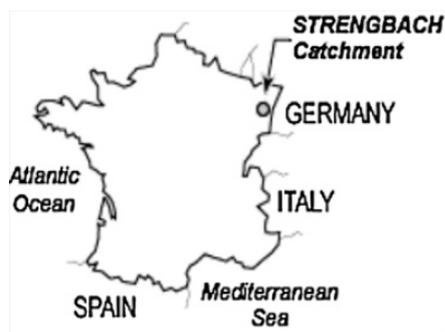


Fig. 5.3 – Localisation du bassin versant du Strengbach.

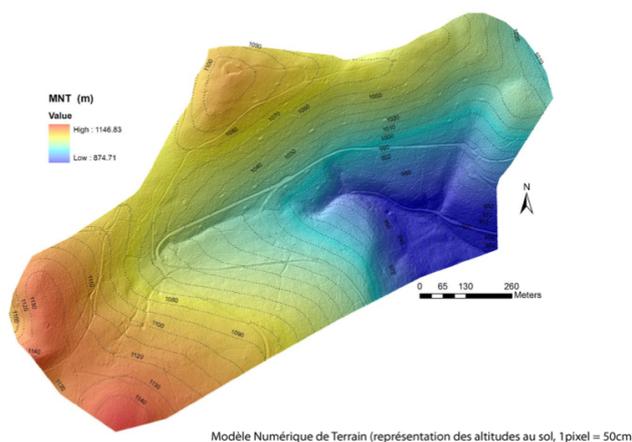


Fig. 5.4 – Modèle Numérique de Terrain du bassin versant du Strengbach.

Plusieurs piézomètres ont été installés en fond de versant, à proximité de l'exutoire. Ils sont indiqués sur la figure 5.5 par les différents points rouges. Nous disposons de chroniques horaires et journalières pour les piézos A, D et C. Le point RS représente l'exutoire.

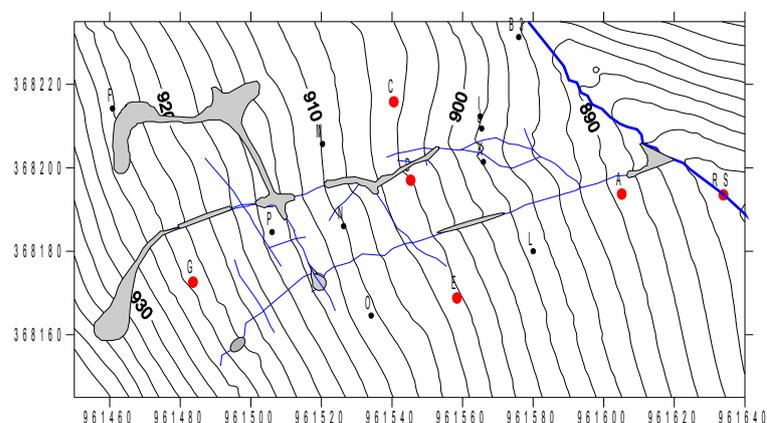


Fig. 5.5 – Piézomètres installés à proximité de l'exutoire du bassin versant du Strengbach.

Le modèle 1D a donc été testé en définissant une colonne correspondant à l'emplacement du piézomètre A et en comparant l'évolution du niveau de la nappe au cours du temps avec les données.

Paramètres du sol. Les paramètres du sol utilisés pour le modèle de colonne sont extraits de la thèse de Biron [1994], catégorie "pessière centenaire". K_{sat} , θ_s et β varient avec la profondeur (cf. tableau 5.1).

Profondeur	$K_{\text{sat}}(m/s)$	θ_s	$\beta (m^{-1})$
0-5 cm	$1,2 \times 10^{-5}$	0,696	12,3
5-10 cm	$3,7 \times 10^{-5}$	0,561	13,0
10-20 cm	$3,6 \times 10^{-5}$	0,550	18,9
20-50 cm	$2,9 \times 10^{-5}$	0,564	15,5
> 50 cm	$2,3 \times 10^{-5}$	0,444	8,9

Tab. 5.1 – Propriétés du sol variant avec la profondeur pour la colonne représentant le piézomètre A.

Les autres paramètres sont pris constants sur toute la colonne et valent respectivement :

$$\begin{aligned} n &= 1,19 \\ m &= 1 - \frac{1}{n} = 0,16 \\ \theta_r &= 0,01 \end{aligned}$$

Paramètres de végétation. Le piézomètre A est situé sous des épicéas d'environ 50 ans. Le *Leaf Area Index* (LAI) ou indice foliaire est pris constant au cours du temps et égal à 4. Cette valeur correspond à celle prise pour les résineux de climat tempéré dans le modèle *Orchidée*. De plus, différentes mesures de LAI ont été réalisées sur le bassin versant du Strengbach. Pour cette pessière ("pessière trentenaire" dans la thèse de Biron [1994]), Biron [1994] indique une valeur de $3,79 \pm 0,69$, obtenue par photos hémisphériques.

La teneur en eau θ_w est prise égale à 0,1 (cf. figure 4.1), valeur moyenne extraite de la thèse de Biron [1994] ("pF4,2"). La teneur en eau θ_d est prise égale à la moitié de la valeur moyenne de θ_s , soit 0,25.

Le profil racinaire est présenté dans le tableau 5.2.

Profondeur	Densité racinaire
0-10 cm	30 %
10-70 cm	60 %
70-100 cm	10 %

Tab. 5.2 – Densité racinaire en fonction de la profondeur.

Pour prendre en compte la macroporosité due aux racines à proximité de la surface, la conductivité hydraulique K_{sat} est modifiée et prise égale à 10^{-3} m/s sur les 60 premiers cm de sol.

Paramètres géométriques. Le piézo A est situé à environ 20 m de la rivière, avec une pente de 26 %. L'ordre de grandeur de la hauteur de la nappe sous la rivière h_r est de 2 m. La longueur du versant L_{tot} est difficile à déterminer précisément, d'autant plus que le bassin versant est convergent vers cette zone où sont placés les piézomètres. L'ordre de grandeur que l'on peut proposer est d'environ 200 m. Il est également difficile de connaître précisément la pente de l'aquifère. Une valeur de 10 % est ici proposée.

Forçage. Les données atmosphériques mesurées sur le bassin versant du Strengbach sont insuffisantes au calcul des flux d'évapotranspiration par le chaînage Castem/Orchidée. Elles ont donc été complétées par la base de données Safran pour le rayonnement incident, la pression à la surface et l'humidité spécifique. La

pluviométrie, le vent et la température de l'air sont des données mesurées du Strengbach au pas de temps horaire.

Résultats

Les premiers résultats sur le piézomètre A sont représentés sur la figure 5.6 en traits pleins, les données de terrain étant en grisées.

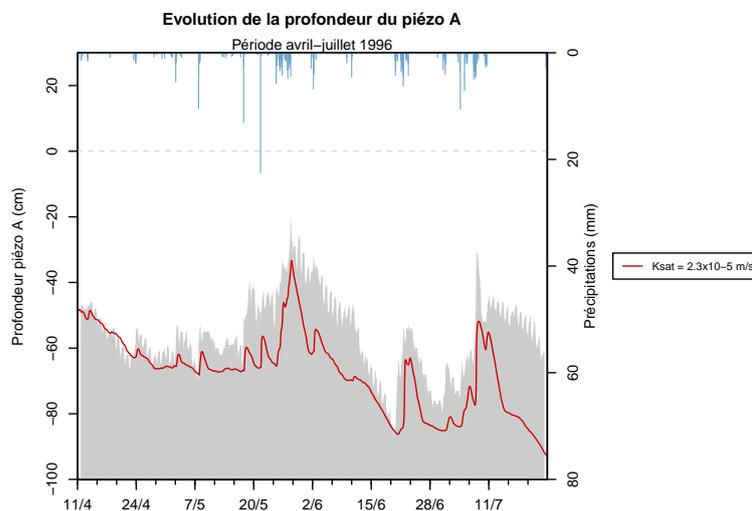


Fig. 5.6 – Comparaison de l'évolution de la profondeur de la nappe du modèle 1D avec les données.

En prenant une conductivité hydraulique de $1,7 \times 10^{-5}$ m/s au lieu de $2,3 \times 10^{-5}$ m/s pour une profondeur supérieure à 50 cm, on observe une amélioration des résultats (figure 5.7).

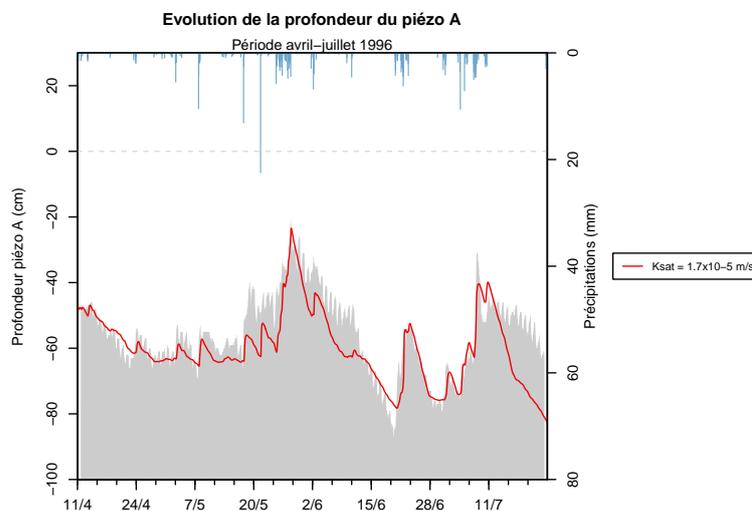


Fig. 5.7 – Comparaison de l'évolution de la profondeur de la nappe du modèle 1D avec les données, avec une modification de K_{sat} en profondeur.

Bibliographie

- BIRON, P. (1994). *Le cycle de l'eau en forêt de moyenne montagne : flux de sève et bilans hydriques stationnels*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.
- CONDON, L. E., MAXWELL, R. M. et GANGOPADHYAY, S. (2013). The impact of subsurface conceptualization on land energy fluxes. *Advances in Water Resources*, 60:188–203. WOS :000325004500016.
- KOLLET, S. J. et MAXWELL, R. M. (2008). Capturing the influence of groundwater dynamics on land surface processes using an integrated, distributed watershed model. *Water Resources Research*, 44(2):W02402. WOS :000252887600001.
- van GENUCHTEN, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal*, 44(5):892.
- VARADO, N., BRAUD, I. et ROSS, P. J. (2006). Development and assessment of an efficient vadose zone module solving the 1d richards' equation and including root extraction by plants. *Journal of Hydrology*, 323(1–4):258–275.